F 1509 (62092

BULETINUL
POLITECHNICEI DIN BUCUREŞTI

BULLETIN DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE BUCAREST

MITTEILUNGEN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE BUKAREST

ANUL XV. — 1944
Nr. 1—4

29

MONITORUL OFICIAL ŞI IMPRIMERIILE STATULUI
IMPRIMERIA NAŢIONALĂ, BUCUREŞTI, 1944

Vol. XV (1944) Nr. 1—4

SOMMAIRE:

Pag.

RACLIŞ N. Démonstration du grand théorème de FERMAT pour des grands valeurs de l'exposant 3

GHEORGHIU ŞERBAN. Sur la théorie de l'équilibre économique 22

CÂRSTOIU I. Le mouvement à la POINSOT généralisé 61

DUMITRESCU D. T. Quelle bezw. Senke im Kreisrohr 70

LINTEŞ I. Sur l'écoulement d'un gaz sous grande pression et avec grande vitesse 77

LIVADA M. G. Physical and mechanical properties of the russian wood intended for aeronautical constructions. 80

LIVADA M. G. Note sur l'influence de l'inspection technologique sur les résultats des essais du bois d'aviation 86

TOPORESCU ER. La formation d'un composé de Cobalt de couleur verte. . 93

GEORGESCU C. C. und CRETZOIU P. Zwei Eichenformen aus Rumänien. . 95

CARAFOLI E. et STIHI E. E. Sur les trajectoires des bombes d'avion. . . 97

CERCHEZ V. TH. Beiträge zur Kenntnis den Sulfonsäuren aus Gasöl . . . 112

Folyóiratkölt. 3629

511.9 THÉORIE DES NOMBRES

DÉMONSTRATION DU GRAND THÉORÈME DE FERMAT POUR DES GRANDES VALEURS DE L'EXPOSANT

par **N. Racliş**

Je démontre l'impossibilité en nombres entiers $x < y < z$ *de l'équation de* FERMAT $x^p + y^p = z^p$ *pour* $p \geq y : (1 + 2^p)$ *et pour les autres valeurs de* p, *je réduis l'équation à un système d'équations dont il reste à démontrer l'impossibilité en nombres entiers* $x < y$.

1. Nous supposons que dans l'équation de FERMAT

$$x^p + y^p = z^p, \tag{1}$$

p est premier impair, x, y, z sont des nombres entiers premiers entre eux, deux à deux, et $x < y < z$. Nous cherchons les conditions que doivent remplir les nombres entiers x, y, z, p pour que l'égalité (1) soit remplacée par une *inégalité* et à cet effet nous suivons la méthode d'exhaustion et utilisons les théorèmes que nous avons établis dans les *Lemmes pour le théorème de* FERMAT, voir le tome XIV, 1943, de ce *Bulletin*, page 145.

2. Nous désignons par y un nombre entier *arbitraire* et par x un autre nombre entier arbitraire, soumis à la seule condition $x < y$. Supposons d'abord que l'exposant p satisfait à la condition $y : p \leqq 1$, c'est-à-dire $p \geqq y$. Le premier crible donne la double inégalité

$$y < z < y + 1$$

qui montre que le nombre z est situé entre deux nombres entiers consécutifs, ce qui l'empêche d'être un entier, c'est donc un nombre irrationnel (le nombre z ne peut être un nombre rationnel; supposons le contraire, le premier membre de l'égalité (1) serait alors un nombre entier, comme x et y, tandisque le second membre, un nombre rationnel, ce qui est absurde), d'où nous déduisons le

Théorème I. — *Lorsque* $p \geqq y$, *il n'existe pas de nombres entiers* x, y, z *tels que* $x^p + y^p = z^p$.

3. Supposons en second lieu

$$1 < y : p \leqq 2 \quad \text{ou} \quad p < y \leqq 2p \quad \text{ou} \quad y : 2 \leqq p < y.$$

Le premier crible donne la double inégalité

$$y < z < y + 2$$

qui montre que le nombre z est situé entre les nombres entiers y et $y + 2$, ce qui l'empêche d'être un entier, c'est donc un nombre irrationnel, à moins qu'il ne soit égal à l'unique nombre entier $(y + 1)$ compris dans l'intervalle, d'où nous déduisons le

Théorème II_1. — *Lorsque $y : 2 \leqq p < y$, il n'existe pas de nombres entiers x, y, z tels que $x^p + y^p = z^p$, s'il n'existe pas de nombres entiers x, y tels que $x < y$ et*

$$(2) \qquad x^p + y^p = (y + 1)^p \quad , \quad y : 2 \leqq p < y.$$

Mais dans l'équation (2), y étant un nombre entier choisi à volonté, la plus grande valeur de x est $(y - 1)$ et le deuxième crible donne pour $a = b = 1$ et $y \leqq 2p$,

$$(y - 1)^p + y^p < (y + 1)^p$$

et a plus forte raison, lorsque $x < y - 1$,

$$x^p + y^p < (y + 1)^p$$

et cette inégalité montre que l'équation (2) ne peut avoir lieu.

On peut donner aux théorèmes I et II_1 un énoncé unique sous la forme du

Théorème II_2. — *Lorsque $p \geqq y : 2$, il n'existe pas de nombres entiers x, y, z tels que $x^p + y^p = z^p$.*

Le grand théorème de FERMAT se trouve ainsi démontré pour les grandes valeurs de l'exposant, à savoir pour $p \geqq y : 2$.

4. Supposons en troisième lieu

$$2 < y : p \leqq 3 \quad \text{ou} \quad 2p < y \leqq 3p \quad \text{ou} \quad y : 3 \leqq p < y : 2.$$

Le premier crible donne la double inégalité

$$y < z < y + 3$$

qui montre que le nombre z est situé entre les nombres entiers y et $y + 3$, ce qui l'empêche d'être un entier, c'est donc un nombre irrationnel, à moins qu'il ne soit égal à l'un des deux nombres entiers $(y + 1)$ ou $(y + 2)$ compris dans l'intervalle, d'où nous déduisons le

Théorème III_1. — *Lorsque $y : 3 \leqq p < y : 2$, il n'existe pas de nombres entiers x, y, z tels que $x^p + y^p = z^p$, s'il n'existe pas de nombres entiers x, y tels que $x < y$ et*

$$(3) \quad x^p + y^p = (y + 1)^p, \; x^p + y^p = (y + 2)^p, \; y : 3 \leqq p < y : 2.$$

Mais dans la seconde équation (3), y étant un nombre entier choisi à volonté, la plus grande valeur de x est $(y-1)$ et le deuxième crible donne pour $a=1$, $b=2$ et $y \leqq 3p$,

$$(y-1)^p + y^p < (y+2)^p$$

et à plus forte raison, lorsque $x < y-1$,

$$x^p + y^p < (y+2)^p$$

et cette inégalité montre que la seconde équation (3) ne peut avoir lieu. Quant à la première équation (3), remarquons que de l'inégalité

$$(2p-1)^p + (2p)^p < (2p+1)^p$$

on déduit, à l'aide du cinquième crible, pour $y > 2p$,

$$(2p-1)^p + y^p < (y+1)^p$$

et à plus forte raison, pour $x < 2p-1$,

$$x^p + y^p < (y+1)^p \quad , \quad y > 2p$$

et cette inégalité montre que la première équation (3) ne peut avoir lieu si $x \leqq 2p-1$.

On peut donner aux trois premiers théorèmes un énoncé unique sous la forme du

Théorème III_2. — *Lorsque $p \geqq y:3$, il n'existe pas de nombres entiers x, y, z tels que $x^p + y^p = z^p$, s'il n'existe pas de nombres entiers x, y tels que $x < y$ et*

$$x^p + y^p = (y+1)^p \quad , \quad 2p \leqq x < y \leqq 3p.$$

5. Cette méthode de *descente*, par rapport aux valeurs de l'exposant p, peut être continuée ; avant de passer au cas général, supposons encore, pour nous rendre compte du mécanisme de la descente, que

$$3 < y:p \leqq 4 \quad \text{ou} \quad 3p < y \leqq 4p \quad \text{ou} \quad y:4 \leqq p < y:3.$$

Le premier crible donne la double inégalité

$$y < z < y+4$$

qui montre que le nombre z est situé entre les nombres entiers y et $y+4$, ce qui l'empêche d'être un entier, à moins qu'il ne soit égal à l'un des trois nombres entiers $(y+1)$ ou $(y+2)$ ou $(y+3)$ compris dans l'intervalle, d'où nous déduisons le

Théorème IV_1. — *Lorsque $y:4 \leqq p < y:3$, il n'existe pas de nombres entiers x, y, z tels que $x^p + y^p = z^p$, s'il n'existe pas de nombres entiers x, y tels que $x < y$ et*

(4) $\quad x^p + y^p = (y+1)^p, \quad x^p + y^p = (y+2)^p, \quad x^p + y^p = (y+3)^p,$

avec la condition $y:4 \leqq p < y:3$.

Mais dans la troisième équation (4), y étant un nombre entier choisi à volonté, la plus grande valeur de x est $(y-1)$ et le deuxième crible donne pour $a=1$, $b=3$ et $y \leqq 4p$,

$$(y-1)^p + y^p < (y+3)^p$$

et à plus forte raison, lorsque $x < y-1$,

$$x^p + y^p < (y+3)^p$$

et cette inégalité montre que la troisième équation (4) ne peut avoir lieu.

Dans la deuxième équation (4), le deuxième crible donne, pour $a=b=2$ et $y \leqq 4p$,

$$(y-2)^p + y^p < (y+2)^p$$

et à plus forte raison, pour $x < y-2$,

$$x^p + y^p < (y+2)^p$$

et cette inégalité montre que la deuxième équation (4) se réduit à l'équation unique

$$(y-1)^p + y^p = (y+2)^p \quad , \quad y:4 \leqq p < y:3.$$

Quant à la première équation (4), il ne faut retenir comme au § 4 et pour la même raison, que les valeurs de $x \geqq 2p$.

On peut donner aux quatre premiers théorèmes un énoncé unique sous la forme du

Théorème IV_2. — *Lorsque $p \geqq y:4$, il n'existe pas de nombres entiers x, y, z tels que $x^p + y^p = z^p$, s'il n'existe pas de nombres entiers x, y tels que $x < y$ et*

$$x^p + y^p = (y+1)^p \quad , \quad 2p \leqq x < y \leqq 4p;$$
$$(y-1)^p + y^p = (y+2)^p \quad , \quad 3p < y \leqq 4p.$$

6. Considérons le cas général et soit r un nombre entier plus petit que y; supposons que

$$r-1 \leqq y:p < r \text{ ou } (r-1)\,p < y \leqq rp \text{ ou } y:r \leqq p < y:(r-1).$$

Le premier crible donne la double inégalité

$$y < z < y + r$$

qui montre que le nombre z est situé entre les nombres entiers y et $y+r$, ce qui l'empêche d'être un entier, à moins qu'il ne soit égal à l'un des $(n-1)$ entiers compris dans l'intervalle, $y+1$, $y+2, \ldots$, $y+r-1$, d'où nous déduisons le

Théorème r_1. — *Lorsque $y:r \leqq p < y:(r-1)$, il n'existe pas de nombres entiers x, y, z tels que $x^p + y^p = z^p$, s'il n'existe pas de nombres entiers x, y tels que $x < y$ et*

(5) $x^p + y^p = (y+1)^p$, $x^p + y^p = (y+2)^p, \ldots, x^p + y^p = (y+r-1)^p$

avec la condition $y:r \leqq p < y:(r-1)$.

Dans la dernière équation (5), la plus grande valeur de x est $(y-1)$ et le deuxième crible donne pour $a=1$, $b=r-1$ et $y \leqq rp$,

$$(y-1)^p + y^p < (y+r-1)^p$$

et à plus forte raison, pour $x < y-1$,

$$x^p + y^p < (y+r-1)^p$$

et cette inégalité montre que la dernière équation (5) ne peut avoir lieu.

On peut montrer comme au § 5 que l'avant-dernière équation (5) se réduit à une équation unique et ainsi de suite.

On peut donner aux r premiers théorèmes un énoncé unique sous la forme du

Théorème r_2. *Lorsque* $p \geqq y:r$, *il n'existe pas de nombres entiers* x, y, z *tels que* $x^p + y^p = z^p$, *s'il n'existe pas de nombres entiers* x, y *tels que* $x < y$ et

$$(6) \quad \begin{cases} x^p + y^p = (y+1)^p & , \quad 2p \leqq x < y \leqq rp; \\ x^p + y^p = (y+2)^p & , \quad 3p < y \leqq rp; \\ \dots\dots\dots\dots & \\ x^p + y^p = (y+r-2)^p & , \quad (r-1)\,p < y \leqq rp. \end{cases}$$

Partons de l'inégalité

$$(3p-1)^p + (3p)^p < (3p+2)^p$$

d'où l'on déduit, à l'aide du cinquième crible, pour $y > 3p$,

$$(3p-1)^p + y^p < (y+2)^p$$

et à plus forte raison, pour $x < 3p-1$,

$$x^p + y^p < (y+2)^p \quad , \quad y > 3p$$

et cette inégalité montre que la deuxième équation (6) ne peut avoir lieu si $x \leqq 3p-1$; pour cette équation, la condition $3p < y \leqq rp$ doit donc être remplacée par

$$3p \leqq x < y \leqq rp.$$

On démontre de la même manière que pour la troisième équation du système (6),

$$x^p + y^p = (y+3)^p \quad , \quad 4p < y \leqq rp,$$

la condition $4p < y \leqq rp$ doit être remplacée par la condition plus précise

$$4p \leqq x < y \leqq rp$$

et ainsi de suite.

D'autre part, le deuxième crible peut opérer de nouvelles exclusions parmi les équations du système (6); en effet, pour $a = 2$, $b = r - 2$ et $y \leqq rp$, on a (lorsque $b \geqq a$, c'est-à-dire $r \geqq 4$)

$$(y-2)^p + y^p < (y + r - 2)^p$$

et cette inégalité montre que la dernière équation (6) se réduit à l'équation unique

$$(y-1)^p + y^p = (y + r - 2)^p \quad , \quad (r-1)\,p < y \leqq rp.$$

De la même manière, pour $a = 3$, $b = r - 3$ et $y \leqq rp$, on a (lorsque $b \geqq a$, c'est-à-dire $r \geqq 6$)

$$(y-3)^p + y^p < (y + r - 3)^p$$

et cette inégalité montre que l'avant-dernière équation (6) se réduit aux deux équations

$$(y-1)^p + y^p = (y + r - 3)^p \quad , \quad (y-2)^p + y^p = (y + r - 3)^p$$

avec la condition $(r-2)\,p < y \leqq rp$ et ainsi de suite pour d'autres équations obtenues en remontant le système (6).

Avec ces simplifications, dans le théorème r_2, le système (6) est remplacé par le système (7)

$$(7) \quad \begin{cases} x^p + y^p = (y+1)^p & , \quad 2p \leqq x < y \leqq rp; \\ x^p + y^p = (y+2)^p & , \quad 3p \leqq x < y \leqq rp; \\ x^p + y^p = (y+3)^p & , \quad 4p \leqq x < y \leqq rp; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (y-1)^p + y^p = (y+r-2)^p & , \quad (r-1)\,p < y \leqq rp. \end{cases}$$

7. Le système (7) peut être regardé de deux points de vue.

1°. On peut choisir à volonté le nombre entier y et déterminer ensuite l'entier r de manière que l'inégalité $p \geqq y : r$ couvre *toutes les valeurs* entières de p supérieures à un nombre donné, par exemple à 2.

2°. On peut choisir à volonte l'exposant p, premier impair, et déterminer ensuite l'entier r de manière que l'inégalité $y \leqq rp$ couvre *toutes les valeurs* entières de y inférieures à un nombre donné.

Regardons le système (7) du premier point de vue et pour donner un exemple soit $y = 44$. Suivant le théorème II_2, il n'existe pas de nombres entiers x, z tels que $x^p + 44^p = z^p$ lorsque $p \geqq y : 2 = 22$, le théorème est donc demontré pour toutes les valeurs de l'exposant plus grandes de 22. Il reste à démontrer le théorème pour les autres valeurs de p premier impair, c'est-à-dire pour $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$;

démontrons-le par exemple pour $p = 11, 13, 17, 19$, c'est-à-dire pour $p \geqq 44 : 4$, donc $r = 4$. Suivant le théorème IV_2 il faut montrer qu'il n'existe pas de nombre entier x tel que

$$x^p + 44^p = 45^p \quad \text{pour} \quad 2p \leqq x < 44;$$

et

$$43^p + 44^p = 46^p.$$

La seconde égalité est impossible car $x = 43$ est impair, tandisque $y = 44$ et $z = 46$ sont pairs (on peut remarquer encore que $x = 43$ est un nombre premier).

Dans la première équation, $p = 11, 13, 17, 19$ et x prend les valeurs comprises entré $2p$ et 44, c'est-à-dire:

$p = 19$, $x = 43, 42, 41, 40, 39, 38$;

$p = 17$, $x = 43, 42, 41, 40, 39, 38, 37, 36, 35, 34$;

$p = 13$, $x = 43, 42, 41, 40, 39, 38, \ldots, 28, 27, 26$;

$p = 11$, $x = 43, 42, 41, 40, 39, 38, \ldots, 24, 23, 22$.

Dans l'équation $x^p + 44^p = 45^p$, $y = 44$ et $z = 45$ sont premiers entre eux; x doit également être premier avec y et avec z, donc il faut exclure les valeurs de x qui sont divisibles par 2, 3, 5, 11 et il reste

$p = 19$, $x = 43, 41$;

$p = 17$, $x = 43, 41, 37, 31$;

$p = 13$, $x = 43, 41, 37, 31, 29$;

$p = 11$, $x = 43, 41, 37, 31, 29, 23$.

Remarquons que toutes les valeurs que peut prendre x sont des nombres premiers, d'où nous concluons à l'impossibilité de l'égalité $x^p + 44^p = 45^p$ et le théorème est démontré pour $y = 44$ et pour toutes les valeurs de l'exposant $p \geqq 11$.

La démonstration est pareille pour $p = 3, 5, 7$, quoique les calculs soient plus longs.

8. Regardons maintenant le système (7) du second point de vue et considérons le cas particulier $p = 3$, $r = 4$; le théorème est vrai pour $y \leqq 2p = 6$ et le système (7) se réduit à

$$x^3 + y^3 = (y + 1)^3 \quad \text{pour} \quad 6 \leqq x < y \leqq 12;$$

$$(y - 1)^3 + y^3 = (y + 2)^3 \quad \text{pour} \quad 9 < y \leqq 12.$$

Dans la première équation y peut prendre les valeurs 7, 8, 9, 10, 11, 12 et x les valeurs comprises entre $6 \leqq x < y$; dans la seconde équation, y est égal à 10, 11, 12, il faut donc montrer l'impossibilité des égalités

$6^3 + 7^3 = 8^3$,	$7^3 + 8^3 = 9^3$,	$8^3 + 9^3 = 10^3$,
	$6^3 + 8^3 = 9^3$,	$7^3 + 9^3 = 10^3$,
		$6^3 + 9^3 = 10^3$,
$9^3 + 10^3 = 11^3$,	$10^3 + 11^3 = 12^3$,	$11^3 + 12^3 = 13^3$,
$8^3 + 10^3 = 11^3$,	$9^3 + 11^3 = 12^3$,	$10^3 + 12^3 = 13^3$,
$7^3 + 10^3 = 11^3$,	$8^3 + 11^3 = 12^3$,	$9^3 + 12^3 = 13^3$,
$6^3 + 10^3 = 11^3$,	$7^3 + 11^3 = 12^3$,	$8^3 + 12^3 = 13^3$,
	$6^3 + 11^3 = 12^3$,	$7^3 + 12^3 = 13^3$,
		$6^3 + 12^3 = 13^3$,
$9^3 + 10^3 = 12^3$,	$10^3 + 11^3 = 13^3$,	$11^3 + 12^3 = 14^3$.

Toutes ces égalités sont impossibles parceque dans chacune d'elles, l'un au moins des nombres x, y, z est égal à un nombre premier ou à une puissance d'un nombre premier; le théorème est donc démontré pour $p = 3$ et $y \leqq 12$.

Si on fait le calcul effectif, on trouve les inégalités:

$6^3 + 7^3 > 8^3$,	$7^3 + 8^3 > 9^3$,	$8^3 + 9^3 > 10^3$,
	$6^3 + 8^3 < 9^3$,	$7^3 + 9^3 > 10^3$,
		$6^3 + 9^3 < 10^3$,
$9^3 + 10^3 > 11^3$,	$10^3 + 11^3 > 12^3$,	$11^3 + 12^3 > 13^3$,
$8^3 + 10^3 > 11^3$,	$9^3 + 11^3 > 12^3$,	$10^3 + 12^3 > 13^3$,
$7^3 + 10^3 > 11^3$,	$8^3 + 11^3 > 12^3$,	$9^3 + 12^3 > 13^3$,
$6^3 + 10^3 < 11^3$,	$7^3 + 11^3 < 12^3$,	$8^3 + 12^3 > 13^3$,
	$6^3 + 11^3 < 12^3$,	$7^3 + 12^3 < 13^3$,
		$6^3 + 12^3 < 13^3$,
$9^3 + 10^3 > 12^3$,	$10^3 + 11^3 > 13^3$,	$11^3 + 12^3 > 14^3$.

Dans chaque colonne, les premières inégalités sont *positives*, par exemple $10^3 + 11^3 - 12^3 > 0$; les dernières inégalités sont *négatives*, par exemple $6^3 + 11^3 - 12^3 < 0$, et entre les premières et les dernières il y a une relation *douteuse* (inégalité ou égalité), souslignée, par exemple

$$7^3 + 11^3 ? 12^3.$$

Les inégalités positives de chaque colonne sont des conséquences, par le quatrième crible, des inégalités positives de la colonne précédente; par exemple, de $7^3 + 10^3 > 11^3$ on déduit $8^3 + 11^3 > 12^3$.

Les inégalités négatives de chaque colonne sont des conséquences, par le cinquième crible, des inégalités négatives de la colonne précédente; par exemple, de $6^3 + 10^3 < 11^3$ on déduit $6^3 + 11^3 < 12^3$.

Seule la relation douteuse (inégalité ou égalité) n'est pas une conséquence des inégalités de la colonne précédente.

Trouver une méthode générale pour décider que les relations douteuses sont des inégalités, c'est démontrer le théorème de FERMAT par induction complète par rapport aux valeurs de y (le théorème est vrai pour les petites valeurs de y, à savoir pour $y \leqq 2p$, voir le théorème II_2).

9. Jusqu'à présent nous n'avons pas tenu compte de la *structure* des nombres entiers x, y, z supposés vérifier l'équation $x^p + y^p = z^p$; on sait, par exemple, qu'ils sont composés, c'est-à-dire qu'aucun d'eux ne peut être égal à un nombre premier ou à une puissance d'un nombre premier, propriété dont nous avons fait usage au § 8. Une autre propriété dit que la différence $(z - y)$ est égale à a^p, où a est un nombre entier, ou au produit de a^p par une puissance de p et pour $p = 31$, la plus petite valeur de a^p est $2^{31} = 2\,147\,483\,648$. Toujours dans le cas $p = 31$, le théorème est démontré pour toutes les valeurs de

$$y \leqq 66\,572\,086\,119,$$

car dans ce cas, *toutes* les équations du système (7) sont impossibles, la différence $(z - y)$ étant, pour toutes, plus petite que 2^{31}.

On voit sur cet exemple combien il est important de tenir compte de la structure des nombres x, y, z pour opérer des fortes simplifications dans le système (7) et dans la théorie générale du théorème de FERMAT; c'est ce que j'ai fait dans le mémoire suivant.

Mais étudions d'abord cette structure.

10. Si l'on pose $s = x + y$, on déduit que s et x sont premiers entre eux, parce que x et $y = s - x$ sont premiers entre eux. L'identité

$$(x^p + y^p) : (x + y) = x^{p-1} - x^{p-2}\,y + \ldots - xy^{p-2} + y^{p-1}$$

montre d'abord que le premier membre est un nombre entier, comme le second, et ensuite que ce nombre est *impair;* en effet, lorsque x et y sont tous les deux impairs, on a dans le second membre la somme de p nombres impairs et lorsque x et y sont, l'un pair et l'autre impair, tous les termes dans le second membre sont pairs, sauf le premier (ou le dernier) qui este impair.

Écrivons maintenant le premier membre sous la forme

$$(8) \qquad (x^p + y^p) : (x + y) = [x^p + (s - x)^p] : s =$$
$$= s^{p-1} - ps^{p-2}\,x + p(p-1)\,s^{p-3}\,x^2 : 2\,! - \ldots + px^{p-1}$$

et désignons par d un diviseur commun, s'il existe, des nombres

$$s = x + y \text{ et } (x^p + y^p) : (x + y).$$

Par hypothèse, le premier membre de l'identité (8) est divisible par d, et le second membre aussi, mais dans le second membre les $(p-1)$ premiers termes sont divisibles par s et par conséquent par d, le dernier terme px^{p-1} doit donc être lui aussi divisible par d, mais s et x étant premiers entre eux, l'autre facteur p doit être divisible par d, mais p étant premier, on a finalement $d = p$.

Nous avons donc démontré que la condition *nécessaire* pour qu'un diviseur d de s soit également un diviseur de $(x^p + y^p) : (x + y)$ est $d = p$; la condition est aussi suffisante, car lorsque s est divisible par p, le second membre de (8) contient p en facteur et à la première puissance sulement.

11. Il y a deux cas à considérer, suivant que $x + y$ est premier à p ou divisible par p.

Dans le premier cas, c'est-à-dire $x + y$ premier à p, les nombres s et t, définis par

$$x + y = s \quad , \quad (x^p + y^p) : (x + y) = t,$$

sont premiers entre eux.

Dans le second cas, c'est-à-dire $x + y$ est divisible par p, le nombre $(x^p + y^p) : (x + y)$ est divisible par p et contient le facteur p à la première puissance seulement; soit $m - 1$ la plus grande puissance de p contenue dans $x + y$; on peut écrire

$$x + y = p^{m-1} s \quad , \quad (x^p + y^p) : (x + y) = pt$$

et les nombres s et t désignent encore deux nombres premiers entre eux.

Dans le premier cas, le produit st est égal à $x^p + y^p = z^p$, d'où l'on déduit que le nombre z se décompose en deux facteurs c et C, premiers entre eux, tels que

$$s = c^p \quad , \quad t = C^p \quad , \quad z = cC$$

ou

$$(9) \quad x + y = c^p \quad , \quad (x^p + y^p) : (x + y) = C^p \quad , \quad z = cC.$$

Dans le second cas, le produit $p^m st$ est égal à $x^p + y^p = z^p$, d'où l'on déduit que le nombre z se décompose en trois facteurs p, c, C, premiers entre eux deux à deux, tels que

$$m = \gamma p \quad , \quad s = c^p \quad , \quad t = C^p \quad , \quad z = p^\gamma cC$$

ou

$$(10) \quad x + y = p^{\gamma p - 1} c^p \quad , \quad (x^p + y^p) : (x + y) = pC^p \quad , \quad z = p^\gamma cC.$$

Dans les deux cas, les nombres p, c, C sont premiers entre eux.

12. Si on reprend les calculs à partir des nombres entiers

$$(z^p - y^p) : (z - y) \quad \text{et} \quad (z^p - x^p) : (z - x),$$

on trouve, pour des raisons de symétrie, les formules

(9′) $\quad z - y = a^p \quad , \quad (z^p - y^p) : (z - y) = A^p \quad , \quad x = aA$

ou

(10′) $\quad z - y = p^{\alpha p - 1} a^p \quad , \quad (z^p - y^p) : (z - y) = pA^p \quad , \quad x = p^\alpha aA$

et

(9″) $\quad z - x = b^p \quad , \quad (z^p - x^p) : (z - x) = B^p \quad , \quad y = bB$

ou

(10″) $\quad z - x = p^{\beta p - 1} b^p \quad , \quad (z^p - x^p) : (z - x) = pB^p \quad , \quad y = p^\beta bB.$

Dans ces formules, toutes les lettres x, y, z, p; a, b, c; A, B, C; α, β, γ, désignent des nombres entiers, dont p est premier *impair;* x, y, z sont l'un *pair* et les deux autres *impairs;* A, B, C sont impairs, voir pour C le § 10, même démonstration pour A et B; a, b, c sont l'un *pair* et les deux autres *impairs*, parce que a et x, b et y, c et z sont respectivement de même parité. Enfin, les nombres p, a, A, b, B, c, C sont premiers entre eux, deux à deux. Quant aux nombres α, β, γ, nous montrerons ailleurs qu'ils sont $\geqq 3$.

13. Mais les nombres x, y, z étant premiers entre eux, il n'est pas possible que deux d'entre eux, ou tous les trois soient à la fois divisibles par p; les six équations (9), (10), (9′), (10′), (9″), (10″) peuvent donc être groupées de quatre manières seulement :

I (9), (9′), (9″), aucun des nombres x, y, z n'est divisible par p;

II (9), (10′), (9″), x est divisible par p;

III (9), (9′), (10″), y est divisible par p;

IV (10), (9′), (9″), z est divisible par p.

Premier cas. Des équations (9′) (9″), (9), on déduit

$$z - y = a^p \quad , \quad z - x = b^p \quad , \quad x + y = c^p;$$

$$(11) \qquad \begin{cases} x = (c^p - b^p + a^p) : 2 \quad , \quad x = aA; \\ y = (c^p + b^p - a^p) : 2 \quad , \quad y = bB; \\ z = (c^p + b^p + a^p) : 2 \quad , \quad z = cC. \end{cases}$$

Deuxième cas. Des équations (10′), (9″), (9) on déduit

$$z - y = p^{\alpha p - 1} a^p \quad , \quad z - x = b^p \quad , \quad x + y = c^p;$$

$$(12) \qquad \begin{cases} x = (c^p - b^p + p^{\alpha p - 1} a^p) : 2 \quad , \quad x = p^\alpha aA; \\ y = (c^p + b^p - p^{\alpha p - 1} a^p) : 2 \quad , \quad y = bB; \\ z = (c^p + b^p + p^{\alpha p - 1} a^p) : 2 \quad , \quad z = cC. \end{cases}$$

Troisième cas. Des equations (9′), (10″), (9) on déduit

$$z-y=a^p \quad , \quad z-x=p^{\beta p-1}b^p \quad , \quad x+y=c^p ;$$

$$(13)\qquad \begin{cases} x=(c^p-p^{\beta p-1}b^p+a^p):2 \quad , \quad x=aA ; \\ y=(c^p+p^{\beta p-1}b^p-a^p):2 \quad , \quad y=p^\beta bB ; \\ z=(c^p+p^{\beta p-1}b^p+a^p):2 \quad , \quad z=cC. \end{cases}$$

Quatrième cas. Des équations (9′), (9″), (10) on déduit

$$z-y=a^p \quad , \quad z-x=b^p \quad , \quad x+y=p^{\gamma p-1}c^p ;$$

$$(14)\qquad \begin{cases} x=(p^{\gamma p-1}c^p-b^p+a^p):2 \quad , \quad x=aA ; \\ x=(p^{\gamma p-1}c^p+b^p-a^p):2 \quad , \quad y=bB ; \\ z=(p^{\gamma p-1}c^p+b^p+a^p):2 \quad , \quad z=p^\gamma cC. \end{cases}$$

On doit ces formules à Abel et on les trouve dans sa lettre de Copenhague du 24 juin 1823, adressée à son ami Holmboe et dans laquelle il écrit :

J'ai cherché à démontrer l'impossibilité de l'équation $x^p+y^p=z^p$ *en nombres entiers, lorsque* p *est plus grand que 2, mais je ne suis parvenu qu'aux théorèmes suivants, qui sont assez curieux.*

14. Étudions d'abord le premier cas et cherchons quelles sont les conditions que doivent remplir les nombres entiers a, b, c pour que les valeurs de x, y, z données par le système (11) vérifient l'équation (1).

De l'hypothèse $x<y$ on déduit

$$a^p=z-y<z-x=b^p \quad , \quad a<b.$$

De l'équation $x^p+y^p=z^p$ on déduit, par le troisième crible,

$$x+y>z \quad , \quad c^p>(c^p+b^p+a^p):2 \quad , \quad c^p-b^p-a^p>0 ,$$

$$c^p>b^p+a^p>b^p \quad , \quad c>b,$$

donc finaement,

$$a<b<c.$$

D'autre part, les nombres a, b, c sont l'un pair et les deux autres impairs, soit a le nombre pair, on déduit

$$(15)\qquad \begin{cases} A=a^{p-1}:2+(c^p-b^p):2a, \\ 2B=b^{p-1}\quad +(c^p-a^p): \ b, \\ 2C=c^{p-1}\quad +(b^p+a^p): \ c, \end{cases}$$

et pour que les nombres A, $2B$, $2C$ soient des nombres entiers, il faut et il suffit que les trois nombres

$$(16)\qquad (c^p-b^p):2a \quad , \quad (c^p-a^p):b \quad , \quad (b^p+a^p):c$$

soient des entiers. Mais la condition nécessaire et suffisante pour que ces trois nombres soient des entiers, est que le nombre entier

$$D = c^p - b^p - a^p > 0$$

soit divisible par les nombres premiers entre eux $2a$, b, c et par conséquent par leur produit $2abc$.

Mais de l'équation (1) on déduit

$$\begin{aligned} x + y - z &\equiv 0 \pmod{2p}, \\ D = c^p - b^p - a^p = 2(x + y - z) &\equiv 0 \pmod{4p}, \\ d = c - b - a &\equiv 0 \pmod{2p}. \end{aligned} \tag{17}$$

Le nombre D étant divisible par les nombres premiers entre eux p et $2abc$, est divisible par leur produit $2pabc$, on a donc finalement

$$D = c^p - b^p - a^p = 2Ppabc \tag{18}$$

et dans cette formule, P désigne un *nombre entier positif*.

À l'aide de ce nombre P, les nombres A, B, C donnés par (15) s'écrivent encore

$$\begin{cases} A = a^{p-1} + Ppbc, \\ B = b^{p-1} + Ppca, \\ C = c^{p-1} - Ppab, \end{cases} \tag{19}$$

et la première formule montre que P est impair, car s'il était pair, A serait lui-même pair, contrairement à ce que nous avons vu au § 10.

Enfin, si on multiplie les formules (19) respectivement par a, b, c, on déduit

$$\begin{cases} x = a^p + Ppabc, \\ y = b^p + Ppabc, \\ z = c^p - Ppabc, \end{cases} \tag{20}$$

et dans ces formules, P désigne un *nombre entier positif* **impair.**

Nous avons supposé que a est pair et b, c impairs; il est évident, pour des raisons de symétrie, qu'on arrive aux mêmes conclusions lorsque est pair l'un quelconque des nombres a, b, c.

15. Considérons d'abord l'exemple donné par Abel: $p = 7$, $a = 4$, $b = 5$, $c = 9$; ces nombres satisfont à la congruence (17), voyons s'ils satisfont aussi à l'égalité (18). On a

$$P = (c^p - b^p - a^p) : 2pabc = 4\,688\,460 : 2 \times 7 \times 4 \times 5 \times 9 = 3721 : 2,$$

et P *n'est pas un nombre entier impair*, parcequ'il est égal à la moitié d'un nombre impair.

Pour donner un deuxième exemple, partons de l'identité

$$(x+y-z)^3 - x^3 - y^3 + z^3 = 3(x+y)(z-x)(z-y)$$

et supposons qu'il soit possible de trouver des nombres entiers a, b, c tels que

$$z-y = a^3 \quad , \quad z-x = b^3 \quad , \quad x+y = c^3,$$

$$c-b-a \equiv 0 \pmod 6 \quad , \quad c^3 - b^3 - a^3 = 2P3abc \quad , \quad x^3 + y^3 - z^3 = 0.$$

L'identité devient, lorsqu'on remplace $x+y-z$ par

$$(c^3 - b^3 - a^3) : 2 = 3P\,abc,$$

$$(3P\,abc)^3 = 3c^3b^3a^3 \quad , \quad 9P^3 = 1,$$

c'est-à-dire que le nombre P de la formule (18) *n'est pas un nombre entier impair* (il n'est même pas rationnel, comme dans le premier exemple, mais irrationnel).

Soit enfin un troisième exemple: p premier impair quelconque et les nombres entiers a, b, c liés par la relation $a+b=c$, qui satisfait à la congruence (17). Les formules (15) deviennent

$$2A = a^{p-1} + (c^p - b^p) : (c-b),$$

$$2B = b^{p-1} + (c^p - a^p) : (c-a),$$

$$2C = c^{p-1} + (b^p + a^p) : (b+a)$$

et les trois nombres

$$(c^p - b^p) : (c-b) \quad , \quad (c^p - a^p) : (c-a) \quad , \quad (b^p + a^p) : (b+a)$$

sont impairs, voir le § 10. Soit, pour fixer les idées, a pair, on déduit que le nombre $2A$ est impair et par conséquent le nombre A n'est pas un nombre entier impair.

De la première formule (19) on déduit que P non plus *n'est pas un nombre entier impair*, parcequ'il est égal à la moitié d'un nombre impair; même conclusion lorsque c'est b ou c qui est pair.

On peut arriver à cette conclusion par une voie différente; partons de l'identité, importante par elle-même et qu'il est facile d'établir par induction complète,

$$(21) \quad (a+b)^p - b^p - a^p = pab(a+b)\{(a+b)^{p-3} - (p-3)\,ab(a+b)^{p-5} : 2 + \\ + [(p-4)(p-5) : 2!]\,(ab)^2(a+b)^{p-7} : 3 - \ldots + (-ab)^{\frac{p-3}{2}}\}.$$

Dans la grande paranthèse, les coefficients sont des nombres entiers, parce que p est premier; les nombres a et b étant tous les deux impairs ou l'un pair et l'autre impair, on déduit que des trois nombres a, b, $a+b$, un seul est pair et les deux autres impairs. Dans la

grande paranthèse, tous les termes sont des nombres pairs, sauf le premier (ou le dernier) qui est impair, la paranthèse représente donc un *nombre entier impair* Q et la formule (21) devient

$$(22) \qquad (a+b)^p - b^p - a^p = Qpab(a+b).$$

Lorsque $c = a+b$, des formules (18) et (22) on déduit $2P = Q$ et P *n'est pas un nombre entier impair*, parcequ'il est égal à la moitié d'un nombre impair.

16. Ces exemples et d'autres encore, que je ne reproduis pas ici, me conduisent à énoncer l'hypothèse suivante:

Hypothèse. *Lorsque* p *est un nombre entier premier impair et* a, b, c *des nombres entiers premiers entre eux, la condition nécessaire et suffisante pour que le nombre*

$$D = c^p - b^p - a^p$$

soit divisible par le produit pabc, *est*

$$a+b=c$$

L'identité (21) montre que la condition $c = a+b$ est en effet *suffisante*, mais je ne suis pas encore parvenu à montrer qu'elle est aussi *nécessaire*.

17. De mon Hypothèse je deduis le

Corollaire. *Lorsque* p *est nombre entier premier impair, il est impossible de trouver des nombres entiers premiers entre eux* a, b, c *tels que le nombre*

$$D = c^p - b^p - a^p$$

soit divisible par le produit 2pabc.

En effet, supposons que D est divisible par $2pabc$ et soit P le quotient; D est divisible en particulier par $pabc$, d'où nous concluons que $c = a+b$. Mais dans ce cas, d'après l'identité (21),

$$D = (a+b)^p - b^p - a^p = Qpabc,$$

où Q est un nombre entier impair, on a donc $Q = 2P$ et P n'est pas un entier parcequ'il est égal à le moitié d'un nombre impair.

En supposant que D est divisible par $2pabc$, nons sommes arrivés à une contradiction et le *Corollaire* est démontré.

18. La démonstration générale du théorème de Fermat dans le premier cas, c'est-à-dire xyz premier à p, est une conséquence de notre Corollaire.

En effet, s'il existe des nombres entiers x, y, z premiers entre eux et non divisibles par p, liés par l'équation (1), ils sont donnés

par les formules (11) en fonction des nombres entiers a, b, c et ces nombres sont liés par l'égalité

$$c^p - b^p - a^p = 2Ppabc,$$

où P doit être un nombre entier positif impair. Mais cette égalité est en contradition avec le Corollaire et la contradiction démontre le théorème.

19. Ce même Corollaire donne la démonstration générale du théorème de FERMAT dans les autres cas, xyz divisible par p.

En effet, supposans qu'il existe des nombres entiers premiers entre eux x, y, z liés par l'équation (1). Supposons, pour fixer les idées, que x est pair et y, z impairs; de l'équation de liaison on déduit que les nombres

$$\begin{aligned} x^{p-1} : 2 &= (z^p - y^p) : 2x, \\ y^{p-1} &= (z^p - x^p) : y, \\ z^{p-1} &= (x^p - y^p) : z, \end{aligned}$$

sont des entiers. Mais la condition nécessaire et suffisante pour que les seconds membres soient des entiers, est que le nombre

$$\Delta = z^p - y^p - x^p$$

soit divisible par les nombres premiers entre eux 2 x, y, z; d'autre part, Δ étant supposé nul, est divisible par une puissance quelconque de p. On déduit que Δ est divisible par le produit $2pxyz$, ce qui est en contradiction avec notre Corollaire et la contradiction démontre le théorème.

On peut dire plus simplement encore que Δ étant supposé nul, est divisible par un nombre entier arbitraire, en particulier par $2pxyz$, ce qui contredit le Corollaire.

20. Suivant les paroles de LEBESGUE, «beaucoup de propriétés des nombres sont des conséquences plus ou moins immédiates de certaines identités. Les unes sont empruntées à l'algèbre élémentaire, leur nombre pourrait être augmenté; d'autres sont empruntées à une algèbre plus élevée». Aussi vois-je dans mon Hypothèse du § 16, une conséquence de l'identité (21), cette même identité qui avait attiré l'attention de CAUCHY, voir *Journal de Mathématiques*, Tome V, 1840, pages 188 et 213.

À titre d'exemple, montrons que notre Hypothèse se confirme pour $p = 1$. Par hypothèse, $D_1 = c - b - a$ est divisible par le produit $1abc$, il existe donc un nombre entier P_1 tel que

$$D_1 = c - b - a = P_1 abc,$$

d'où l'on déduit

$$(c-b):a=1+P_1 bc,$$
$$(c-a):b=1+P_1 ca,$$
$$(a+b):c=1-P_1 ab.$$

Mais $0<a<b<c$ et lorsque le nombre entier $P_1>0$, on déduit $1-P_1 ab<0$ et $(a+b):c<0$, ce qui est absurde.

Lorsque le nombre entier $P_1<0$, on déduit $1+P_1 bc<0$ et $1+P_1 ca<0$ et ensuite $(c-b):a<0$ et $(c-a):b<0$, ce qui est encore absurde.

Le nombre entier P_1 ne pouvant être ni positif, ni négatif, est nul et par conséquent $c-b-a=0$ ou $a+b=c$, ce qu'il fallait démontrer.

Post scriptum à mes *Lemmes*. 1°. Dans l'énoncé du Théorème II, démontré au § 4, la condition $y\leqq p(a+b)$ est suffisante, sans être nécessaire. On trouve une meilleure limitation de la manière suivante. Soit

$$P(y)=(y-a)^p+y^p-(y+b)^p=$$
$$=y^p-p(b-a)\,y^{p-1}-p(p-1)\,(b^2-a^2)\,y^{p-2}:2!-$$
$$-p(p-1)(p-2)(b^3+a^3)\,y^{p-3}:3!-\ldots-(b^p+a^p)$$

et lorsque $p\geqq 3$ et $b\geqq a$, dans le second membre le premier terme est positif et tous les autres sont négatifs ou nuls, le deuxième et le quatrième étant négatifs.

On a évidemment $P(y)<0$ lorsque les *deux* premiers termes au second membre ont une somme négative ou nulle, c'est-à-dire

$$y^p-p(b+a)\,y^{p-1}\leqq 0,$$

ce qui donne la condition connue $y\leqq p(b+a)$.

Mais on a encore $P(y)<0$ lorsque les *trois* premiers termes au second membre ont une somme négative ou nulle, c'est-à-dire

$$y^p-p(b+a)\,y^{p-1}-p(p-1)\,(b^2-a^2)\,y^{p-2}:2\leqq 0$$

ou

$$y^2-p(b+a)\,y-p(p-1)\,(b^2-a^2):2\leqq 0.$$

Mais $y>0$ et la dernière condition est satisfaite lorsque

$$y\leqq \tfrac{1}{2}p(b+a)+\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2(b+a)^2+2p(p-1)\,(b^2-a^2)}$$

et cette nouvelle borne est plus grande que l'ancienne $p(b+a)$, pour $b>a$, et l'écart entre les deux bornes est d'autant plus grand que la différence $(b-a)$ est elle-même plus grande. Par exemple, pour

$a=1$, $b=19$, $p=3$, les deux bornes sont respectivement 60 et 74 et l'écart $74-60=14$.

Mais on trouve une borne supérieure aux deux bornes précédemment déterminées lorsqu'on pose la condition que les *quatre* premiers termes au second membre aient une somme négative ou nulle ce qui donne

$$y^3-p(b+a)y^2-p(p-1)(b^2-a^2)y:2-p(p-1)(p-2)(b^3+a^3):6\leqq 0$$

et ainsi de suite.

2°. Supposons maintenant $a>b$, $p\geqq 3$; le polynôme $P(y)$ s'écrit encore

$$P(y)=[y^p-p(a+b)y^{p-1}]+$$
$$+[p(p-1)(a^2-b^2)y^{p-2}:2-p(p-1)(p-2)(a^3+b^3)y^{p-3}:6]+$$
$$+\ldots+[p(a^{p-1}-b^{p-1})y-(a^p+b^p)].$$

On a certainement $P(y)>0$ lorsque les $(p+1):2$ paranthèses sont positives, c'est-à-dire lorsque

$$y>p(a+b)$$
$$y>\frac{p-2}{3}\times\frac{a^3+b^3}{a^2-b^2}$$
$$y>\frac{p-4}{5}\times\frac{a^5+b^5}{a^4-b^4}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y>\frac{1}{p}\times\frac{a^p+b^p}{a^{p-1}-b^{p-1}}.$$

Je dis que ces inégalités se réduisent aux deux premières, parceque les auters sont des conséquences de la deuxième. En effet, d'abord les coefficients

$$(p-2):3\quad,\quad(p-4):5,\ldots,1:p$$

vont en décroissant; ensuite, pour $n=1,2,\ldots$ on a

$$\frac{a^{2n+3}+b^{2n+3}}{a^{2n+2}-b^{2n+2}}<\frac{a^{2n+1}+b^{2n+1}}{a^{2n}-b^{2n}},$$

car si on multiple en croix, on déduit l'inégalité évidente

$$-(ab)^{2n}(a^3-b^3)<+(ab)^{2n+1}(a-b).$$

Nous avons donc obtenu le

Théorème VII. — *Si* $a>b>0$, $p\geqq 3$ *et*

$$y\geqq Max[p(a+b),\ (p-2)(a^2-ab+b^2):3(a-b)],$$

on a l'inégalité

$$(y-a)^p+y^p>(y+b)^p.$$

3°. Lorsque $p \geqq 1$, on a

$$2 < (1+1:2p)^{2p} < 3$$

et si on prend les racines carrées, on déduit l'inégalité $(1+1:2p)^p < 2$, qui peut s'écrire encore

$$(2p+1)^p < 2(2p)^p \quad \text{ou} \quad (2p)^p + (2p)^p > (2p+1)^p$$

qui jointe à l'inégalité $(2p-1)^p + (2p)^p < (2p+1)^p$, valable pour $p \geqq 3$, donne le système remarquable

$$\begin{cases} (2p)^p + (2p)^p > (2p+1)^p \\ (2p-1)^p + (2p)^p < (2p+1)^p. \end{cases}$$

Mais la première de cas inégalités peut être remplacée par une autre, plus faible; en effet, pour $n \geqq 1$, on a

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < 3\,; \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < 3\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \leqq 4$$

lorsque $n \geqq 2$, d'où l'on déduit l'négalité

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < 4 \quad \text{pour} \quad n \geqq 1$$

(pour $n=1$ et $n=2$, la vérification est faite directement).

Si l'on pose $n+2 = 2p$, on déduit pour $p \geqq 2$,

$$\left(\frac{2p}{2p-1}\right)^{2p} < 4\,, \left(\frac{2p}{2p-1}\right)^{p} < 2,$$

$$(2p-1)^p + (2p-1)^p > (2p)^p.$$

C'est l'inégalité cherchée, dont on déduit, par le quatrième crible, l'inégalité plus forte

$$(2p)^p + (2p)^p > (2p+1)^p.$$

Cette méthode conduit à des inégalités plus faibles encore, valables pour les valeurs de p supérieures à une certaine borne; par exemple, de

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+3} < 4 \quad \text{pour } n \geqq 3,$$

on déduit

$$(2p-2)^p + (2p-2)^p > (2p-1)^p \quad \text{pour} \quad p \geqq 3.$$

De l'inégalité

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+3} < 8 \quad \text{pour} \quad n \geqq 1,$$

on déduit

$$(3p-2)^p + (3p-2)^p > (3p-1)^p \quad \text{pour} \quad p \geqq 2,$$

et ainsi de suite. Mais sur ces inégalités et leurs conséquences, je pense revenir.

Institut Mathématique Roumain
Bucarest, le 25 Décembre 1941

330 ÉCONOMIE MATHÉMATIQUE

SUR LA THÉORIE DE L'ÉQUILIBRE ÉCONOMIQUE

par **Şerban Gheorghiu**

On rappelle d'abord les points essentiels de la théorie de l'équilibre économique d'après WALRAS *et* PARETO.

On admet ensuite l'hypothèse que l'utilité finale de la monnaie est égale à 1 et on établit les équations de la dynamique des prix, à partir d'une position d'équilibre. On démontre en particulier qu'à partir d'une telle position, les variations des prix dépendent des variations totales des quantités.

La stabilité de l'équilibre économique est définie de deux manières différentes, pour les pays ou collectivités autarchiques d'un côté et pour les pays libres-échangistes de l'autre. Pour qu'il existe stabilité au sens de cette seconde définition, il est nécessaire que l'utilité finale de la monnaie soit constante, ce qui justifie l'hypothèse admise. La stabilité, au sens de la première définition, fait apparaître que la fonction utilité totale doit dépendre du temps.

On met en évidence une solution simple du problème de l'équilibre ou solution du patrimoine moyen. On en fait plusieurs applications notamment à la loi de l'offre et de la demande et pour démontrer que toute loi économique, établissant une correspondance entre prix et quantités effectivement mises en circulation, est incompatible avec la théorie de l'équilibre.

On expose aussi les difficultés que soulève la vérification pratique des théories de WALRAS-PARETO. *Le travail se termine par l'étude de ces théories, si l'on suppose que l'utilité finale de la monnaie dépend du temps et non pas des richesses, quelles qu'elles soient.*

La théorie de l'équilibre économique constitue dans l'ensemble des théories sur la valeur un chapitre isolé, une « tête de pont » gagnée à la pensée mathématique dans le monde des réalités économiques. Et, on ne franchit pas bien souvent, ni trop aisément cette tête de pont.

À ce propos, un économiste et mathématicien de haute autorité, M. M. G. EVANS écrit [3, p. 5] [1]:

[1]) Les numéros figurant entre crochets — dans le texte — renvoient à la Bibliographie, qui se trouve à la fin.

« Il n'y a pas unanimité sur les buts de l'Économie Politique, même comme science mathématique. Beaucoup d'économistes croient que les théories mathématiques n'ont pas d'applications numériques possibles [8, p. 293; 9, p. 320]. Pour d'autres, les buts pratiques existent mais ne dominent pas la théorie [7]. Par exemple, dans un cas particulier de la théorie de l'équilibre, comment pourait-on résoudre 5209 équations portant sur 5209 inconnues? N'a-t-on pas fait déjà beaucoup lorsque l'on a réussi à trouver précisément 5209 telles équations, pas plus, pas moins, afin de savoir que les 5209 inconnues sont déterminées. On n'applique pas, et cela vaut mieux, ce raisonnement à la théorie cinétique des gaz ».

« En effet, s'il n'y a pas de contrôle numérique possible, comment peut-on être assuré que ce sont précisément ces équations, et pas d'autres, qui expliquent les phénomènes réels? D'abord c'est demander beaucoup à l'esprit humain de construire à priori de telles théories, et d'être certain que les phénomènes objectifs doivent s'encadrer dans les tableaux formés. Nous voyons déjà qu'il y a d'autres hypothèses admissibles. Ensuite, si l'on veut entrer dans les détails, comment savoir que les équations obtenues sont compatibles, afin que des solutions existent, et qu'elles sont indépendantes, afin que le système de solutions soit déterminé ».

À peine faut-il ajouter, que les variations monétaires éprouvées, après la grande guerre, dans la presque totalité des pays du monde ont fini par mettre en doute la portée même de cette théorie. Car l'éminent savant M. C. Colson, dans la préface qu'il a écrite pour le livre de M. Divisia [2, p. XX et XXI] remarque:

« Walras et Pareto, écrivant à une époque où les métaux précieux (avec des billets échangeables à vue contre du métal) servaient seuls de monnaie dans tous les pays, avaient établi leur théorie en assimilant la monnaie aux autres marchandises; l'or, en effet, sous le régime de la liberté de la frappe, n'est qu'une marchandise, servant à des usages variés, que les hommes ont pris l'habitude d'employer comme étalon des valeurs. Mais sous le régime des billets à cours forcé, l'unité monétaire ne représente plus qu'un mot imprimé sur des chiffons de papier et toutes les valeurs se mesurent avec un mètre infiniment plus élastique que le caoutchouc de sorte que les chiffres qui les représentent dans l'usage courant paraissent n'avoir plus aucun sens et qu'on ne peut plus avoir dans la monnaie une marchandise comme les autres. Sans doute, Walras avait abordé l'étude de cas, mais sans aboutir à des démonstrations bien satisfaisantes ».

Et, M. Colson poursuit:

« L'intervention dans les échanges de cet instrument purement conventionnel, dont l'abondance dans chaque pays ne dépend que de la

volonté du Gouvernement, avait cette conséquence qu'une équation manquait, dans l'édiffice de PARETO, pour que le nombre des équations fut égal à celui des inconnues, de sorte que la solution de tout le problème des prix semblait indéterminée. M. DIVISIA montre que cette équation est précisément celle qui lie la valeur de la monnaie de papier à l'importance des émissions, autrement dit celle qui est fournie par la vieille théorie quantitative de la monnaie, si discutée sans que rien ait pu l'ébranler, ni surtout la remplacer ».

Dans ce travail je me propose de montrer que la théorie de l'équilibre économique, complétée par la notion de stabilité de cet équilibre, peut avoir une position centrale parmi les autres théories de la valeur, étant susceptible de leur apporter des indications fort instructives notamment pour les lois quantitatives des prix, pour la théorie de l'utilité marginale et pour la loi circulatoire de la monnaie. De plus, nous nous proposons de faire voir, que la même théorie bien qu'envisageant le phénomène statique de l'équilibre, constitue un instrument de recherches d'une incomparable pénétration — sinon le seul — aussi pour l'étude du phénomène dynamique du mouvement des prix.

* * *

Je fais hommage de ce travail à mon professeur d'autrefois, M. ALFRED BARRIOL, ancien Secrétaire Général dela Société de Statistique et de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris.

Il y a une vingtaine d'années, hélas ! M. BARRIOL avec une touchante sollicitude, attirait mon attention sur les belles théories du grand économiste français, que fut WALRAS et me conseillait de m'en occuper. Appelé, dans d'autres directions, je fus empêché jusqu'à maintenant de donner suite à son précieux conseil.

À l'heure où j'évoque ces instants lointains de ma vie d'étudiant, je ne saurais dire si M. BARRIOL se trouve encore de ce monde. Mais, quelque fut l'infortune de son sort, je lui garde un souvenir ému et je lui exprime, à lui, ainsi qu'à tous mes grands maîtres de la Sorbonne, avec mes sentiments bien affectionnés, ma reconnaissance toute dévouée.

L'HYPOTHÈSE DE WALRAS ET L'OPHÉLIMITÉ TOTALE

1. Pour donner plus de clarté à notre exposé et afin d'éviter des renvois incessants à d'autres mémoires, nous commençons par rappeler brièvement les points essentiels de la théorie de l'équilibre économique.

WALRAS a établi cette théorie sur une hypothèse, qui porte depuis son nom. Ainsi il admet que l'utilité de tout patrimoine de richesses divisibles et mesurables constitue un attribut objectif, intrinsèque du patrimoine. Par conséquant, l'utilité d'un patrimoine dépend exclusi-

vement des quantités des différents éléments composants et nullement du libre arbitre de son détenteur. De plus, l'échange entre deux ou plusieurs coéchangistes s'accomplit de manière que les patrimoines résultants de cette opération réalisent leur maximum d'utilité.

Dans la conception walrassienne, les coéchangistes sont une espèce d'*homines economici*, ou d'hommes moyens au sens de la science statistique. Ces gens ne connaissent rien du sacrifice ou de l'élévation humaine et par contre ils sont exempts de tout vice ou déchéance. À leur égard BUFFON répéterait son mot célèbre: *Ils n'ont ni mémoire, ni morale.* Ces gens n'ont que des intérêts et ils agissent toujours au mieux de leurs intérêts individuels.

A priori, une telle conception n'est ni à admettre ni à rejeter mais tout simplement à vérifier, pour connaître dans quelle mesure le monde existant se rapproche ou s'éloigne de ce monde *moyen* qu'y est envisagé.

Et il faut encore ajouter qu'il est évident que sans admettre une telle hypothèse, et surtout sans admettre l'existence d'un certain déterminisme économique — déterminisme qui se trouve implicitement admis avec l'hypothèse de WALRAS, tout recours au raisonnement mathématique serait rendu impossible.

Soient maintenant:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

les quantités des différentes richesses formant un patrimoine (P). WALRAS exprime son hypothèse, par l'égalité

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \ldots + f_n(x_n)$$

U étant l'utilité totale du patrimoine (P), tandis que $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont des fonctions régulières, ainsi que leur dérivées pour les valeurs des x que l'on considère. Leurs différentielles:

$$f_1'(x_1)\,\delta x_1, f_2'(x_2)\,\delta x_2, \ldots \quad , \quad f_n'(x_n)\,\delta x_n$$

mesurent les utilités finales ou marginales (*final degree of utility*) des petits accroissements des richesses à partir des quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si l'on prend

$$\delta x_1 = \delta x_2 = \ldots \quad = \delta x_n = 1$$

les utilités marginales deviennent égales aux dérivées $f_1'(x_1)$, $f_2'(x_2), \ldots,$ $f_n'(x_n)$. Dans la suite les utilités marginales seront mesurées par des dérivées.

La forme analytique, que WALRAS donne à sa propre hypothèse est en quelque sorte réstrictive, puisqu'elle suppose de plus que les

utilités finales sont indépendantes les unes des autres, ce qu'on ne peut pas toujours admettre. Ainsi, pour prendre un exemple concret, si l'utilité finale de x_1 quintaux de froment est indépendante de celle de x_2 kgs de savon, ne l'est plus, par rapport à l'utilité finale de x_3 quintaux de seigle, parce qu'on ne peut pas remplacer le froment par le savon, tandis qu'on peut lui en substituer du seigle.

Mais, l'expression analytique formée par WALRAS pour l'utilité totale U, soulève une autre objection de beaucoup plus importante, à savoir: *le temps n'y figure pas.*

Remarquons d'abord, que l'utilité finale de certains produits varie avec les saisons. Ainsi un boisseau de froment un mois avant, a vraisemblablement la même utilité marginale que 12 boisseaux à l'époque des récoltes (voir plus loin, § 7), puisque sans faute les coéchangistes de WALRAS sont des gens prévoyants.

De plus, l'utilité finale de la monnaie est extrêmement sensible. Des facteurs échappant à l'action des coéchangistes et d'importance considérable peuvent dans le temps la modifier profondément et par cela même, influencer tout l'ensemble des prix. Dans les lignes reproduites plus haut, M. COLSON se rapporte justement à ces facteurs perturbateurs.

Nous allons montrer, dans ce travail, que ce n'est pas une équation qui manque au système de WALRAS et PARETO, mais bien une variable, c'est-à-dire précisément le temps.

2. Partant d'un point de vue apparément différent, VILFREDO PARETO a repris la question pour aboutir à des conclusions tout semblables à celles de WALRAS.

PARETO observe que bien souvent il est indifférent de posséder certaines quantités de richesses ou certaines autres quantités de ces mêmes richesses. En d'autres termes, il existe des *variétés d'indifférence* définies par une équation de la forme:

$$I = \Phi (x_1, x_2, \ldots x_n)$$

I étant constant pour la même variété et $x_1, x_2, \ldots x_n$ les quantités que l'on possède des différentes richesses. Il est donc indifférent de posséder les quantités x, ou les quantités $y_1, y_2 \ldots y_n$, pourvu que la fonction $\Phi (y_1, y_2 \ldots y_n)$ ait la valeur I. La constante I est nommée indice d'ophélimité et la fonction Φ, ophélimité totale.

D'après PARETO l'échange s'effectue de manière que chacun des coéchangistes obtienne le maximum d'ophélimité totale.

Dans sa théorie PARETO introduit aussi des *variétés-obstacle* exprimées par des relations entre les quantités des richesses du patrimoine. Dans la suite, nous ne nous en servirons pas de pareilles relations.

Il est évident que sur la variété

$$I = \Phi(x_1, x_2 \dots x_n) \tag{2,1}$$

on a aussi

$$U(x_1, x_2 \dots x_n) = C \tag{2,2}$$

C étant une constante et U la fonction utilité totale de WALRAS. Réciproquement de l'équation (2,2) on déduit (2,1) parce que *indifférence* c'est *égale utilité* et inversement, on a même *intêret* à posséder le patrimoine $P(x_1, x_2 \dots x_n)$ ou tout autre, pourvu que l'utilité U reste constante.

Pour le problème de l'équilibre économique l'utilité totale ou l'ophélimité totale sont deux notions équivalentes. Analytiquement, celà revient à dire que l'on a:

$$F(U, \Phi) = 0$$

F étant une fonction arbitraire.

Mais PARETO donne à l'ophélimité totale la forme la plus générale et ne se contente pas, comme WALRAS, pour l'utilité totale à une forme particulière. D'autre part, PARETO comme WALRAS, ne fait pas intervenir le temps parmi les variables à considérer.

Pour les problèmes de l'économie rationnelle les fonctions U ou Φ sont similaires aux fonctions des forces des problèmes de la mécanique rationnelle, tandis que les variétés

$$U = C \quad \text{ou} \quad \Phi = I$$

aux lignes de niveau. Les utilités marginales ou finales sont comparables dans cette analogie, aux projections sur les axes de coordonnées du travail élémentaire, ou tout simplement aux forces.

Pour l'uniformité de la terminologie dans ce qui va suivre j'emploie constamment la notion d'utilité, et non pas celle équivalente, d'ophélimité.

L'utilité totale est exprimée par une fonction

$$U = \Phi(s, x_1, x_2 \dots x_n; t)$$

du disponible en monnaie s, des quantités x_1, $x_2 \dots x_n$ des différentes richesses du patrimoine et du paramètre t, temps. Pour plus de simplicité la fonction Φ est supposée en général développable en série TAYLOR pour tout système de valeurs positives ou nulles, des variables. Toutefois la continuité par rapport au temps n'est pas supposée depuis 0 jusqu'à $+\infty$, in *secula seculorum*. Pour certaines valeurs particulières du paramètre t, la fonction U est susceptible d'avoir des discontinuités et par conséquant de ne plus admettre un développement TAYLOR.

Nous préciserons plus loin d'autres conditions pour la fonction utilité totale afin que l'*extremum* qu'on obtiendra représente effectivement une position d'équilibre.

L'étude de la stabilité de l'équilibre économique nous conduira à admettre que l'utilité finale de la monnaie est une constante absolue, c.-à.-d. indépendante des valeurs des variables x_1, $x_2 \ldots x_n$ et même du temps t. Cette hypothèse a été envisagée par le Pr. IRVING FISHER [4]. De plus, MARSHALL et le Pr. BORDIN l'ont admise explicitement [1]). Nous en ferons également usage.

Nous prendrons donc l'utilité finale de la monnaie égale à l'unité.

On tire de cette hypothèse que la fonction utilité totale devient

$$U = s + \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n ; t)$$

la fonction φ étant toujours supposée développable en série TAYLOR, dans l'espace fermé des valeurs positives ou nulles des $x_1, x_2 \ldots x_n$. Par rapport au temps, cette fonction peut avoir des singularités.

Les utilités marginales:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}$$

ou

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$$

sont supposées des fonctions non croissantes des quantités [2]). En d'autres termes, si à l'instant t on considère deux patrimoines P' et P'' formés respectivement des richesses

$$s', x_1', x_2' \ldots x_n'$$
$$s'', x_1'', x_2'' \ldots x_n''$$

avec

$$s' \leqq s'', \; x_1' \leqq x_1'' \ldots x_n' \leqq x_n''$$

on a aussi

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i'} \geqq \frac{\partial \Phi(P_1'')}{\partial x_i''} \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

ou

$$\frac{\partial \varphi(P_1')}{\partial x_i'} \geqq \frac{\partial \varphi(P_1'')}{\partial x_i''} \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

De plus, ces utilités marginales sont nulles à l'infini.

---

[1]) En impossibilité d'avoir une documentation complète nous faisons ces citations d'après M. HENRI DENIS (1, p. 55).

[2]) M. FRANÇOIS PERROUX (p. 74) admet que « pour un besoin physique, tel que la faim, les premières doses stimulent le besoin au lieu de l'apaiser (ont une utilité croissante) ». Pour plus de simplicité nous admettrons partout que les utilités marginales sont des fonctions constamment non croissantes.

LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE L'ÉQUILIBRE ÉCONOMIQUE

3. Considérons N coéchangistes au sens de WALRAS, formant une unité ou une même collectivité économique et numérotons-les de 1 à N. Soit au moment t,

$$\sigma_i,\ \alpha_i,\ \beta_i \ldots \lambda_i \qquad (i = 1,2 \ldots N)$$

le patrimoine P_i de l'individu i, composé du total σ_i de ses moyens de payement et des quantités α_i, $\beta_i \ldots \lambda_i$ des n richesses existant sur le marché. Les quantités sont mesurées en unités arbitraires mais choisies une fois pour toutes. Certaines des quantités α_i, $\beta_i \ldots \lambda_i$ peuvent être nulles.

L'utilité totale $U(P_i)$ du patrimoine P_i est définie comme au § 2 par

$$U(P_i) = \Phi(\sigma_i, \alpha_i, \beta_i \ldots \lambda_i ; t)$$

la valeur de t étant supposée non-singulière.

Si $p_1, p_2 \ldots p_n$ sont les prix, en monnaie et à l'instant t des n richesses, d'après l'hypothèse de WALRAS l'individu i échange son patrimoine P_i contre le patrimoine P'_i

$$\sigma_i + s_i,\ \alpha_i + x_i,\ \beta_i + I_i, \ldots \lambda_i + w_i$$

sous les deux conditions suivantes:

I. Le coéchangiste i réalise le maximum d'utilité, c'est-à-dire la fonction:

$$U(P'_i) \equiv \Phi(\sigma_i + s_i,\ \alpha_i + x_i,\ \beta_i + I_i, \ldots \lambda_i + w_i ; t)$$

devient maximum.

II. Par l'échange le coéchangiste i n'accroît ni ne diminue la valeur de son patrimoine.

En d'autres termes il y a équivalence entre ce qu'il donne avec ce qu'il reçoit, ou:

$$(3,1) \qquad s_i + p_1 x_i + p_2 y_i + \ldots + p_n w_i = 0$$

Cette dernière équation est désignée habituellement sous le nom de l'*équation du bilan.*

En utilisant la méthode classique des multiplicateurs de LAGRANGE, on est conduit à considérer l'expression:

$$U(P'_i) + \xi_i\ (s_i + p_1 x_i + p_2 I_i + \ldots + p_n w_i)$$

et à déterminer son maximum, comme si le variables s_i, x_i, $y_i \ldots$, w_i étaient indépendantes. On obtient:

$$\frac{\partial U(P_i')}{\partial s_i} + \xi_i = 0$$

$$\frac{\partial U(P_i')}{\partial x_i} + \xi_i p_1 = 0.$$

$$\frac{\partial U(P_i')}{\partial w_i} + \xi_i p_n = 0.$$

Ou, en éliminant ξ_i on trouve:

$$(3,2) \qquad \frac{\frac{\partial U(P_i)}{\partial s_i}}{1} = \frac{\frac{\partial U(P_i')}{\partial x_i}}{p_1} = \frac{\frac{\partial U(P_i')}{\partial y_i}}{p_2} = \ldots = \frac{\frac{\partial U(P_i')}{\partial w_i}}{p_n}.$$

De ces n inégalités (3.2) les $n-1$ dernières expriment le théorème bien connu de WALRAS sur l'utilité marginale, avec les seules différences, que le temps y figure et que la fonction U a une forme plus générale que celle que lui a été donnée par WALRAS (voir § 1). En prenant $t = 0$ et en particularisant la fonction U, on retrouve le théorème même de WALRAS.

Passons maintenant du seul coéchangiste i à leur totalité. En faisant usage des deux hypothèses de tout à l'heure par chacun de ces N individus on trouve le même système (3,2) l'indice i étant successivement égal à tous les nombres consécutifs de 1 jusqu'à N.

De plus, il y a conservation de moyens de payement et des richesses puisque par l'échange on ne crée et on ne détruit ni monnaie ni richesses. On a donc:

$$(3,3) \qquad \begin{aligned} s_1 + s_2 + \ldots\ldots + s_N &= 0 \\ x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_N &= 0 \\ y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_N &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_1 + w_2 + \ldots\ldots + w_N &= 0. \end{aligned}$$

L'ensemble des équations (3,1), (3,2), (3,3) fournit la solution du problème de l'équilibre économique. Pour nous en assurer il suffit de faire le dénombrement des inconnues et des équations.

En effet, les inconnues du problème sont les n prix:

$$p_1, p_2, \ldots p_n$$

et les $(n+1)\,N$ quantités échangées:

$$s_i, x_i, y_i, \ldots w_i \qquad (i = 1, 2, \ldots N)$$

soit en total $(n+1)\,N + n$ inconnues.

D'autre part nous avons N équations (3,1) du bilan, nN équations (3,2) — ou n équations pour chaque indice i — et $n + 1$ équations (3,3) relatives à la conservation des richesses.

Il en résulterait un total de:

$$N + nN + n + 1 = (n + 1) N + (n + 1)$$

et il semblerait qu'il y ait une équation de plus que d'inconnues. Il n'en est rien puisque le système des N équations (3.1) du bilan et des $n + 1$ équations (3,3) de conservation se réduit à $N + n$ équations distinctes. Pour le vérifier il suffit d'ajouter les premiers membres des équations (3,1) d'un côté et de l'autre d'ajouter de la même manière les premiers membres des équations (3) après les avoir multipliés respectivement par $1, p_1, p_2 \ldots p_n$. On obtiendra ainsi des résultats identiques.

Il résulte en définitif qu'il y a autant d'inconnues que d'équations [1]).

Les équations (3,2) sont susceptibles d'une interprétation géométrique bien simple. À cet effet considérons à l'instant t, l'espace à $n + 2$ dimensions des variables $s, x_1, x_2 \ldots x_n, U$. Dans cet espace le patrimoine P_i est représenté par un point, ou:

$$U_i = \Phi (s_i, \alpha_i, \beta_i \ldots \lambda_i; t); \; s = \sigma_i \; x_1 = \alpha_i \ldots \; x_n = \lambda_i \quad (i = 1, 2 \ldots N)$$

Nous dirons que le point P est le point patrimoine relatif au coéchangiste i.

Les équations (3,2) expriment que pour la position de l'équilibre, les variétés planes tengentes à la variété

$$U = \Phi (s, x_1, x_2 \ldots x_n; t)$$

aux points patrimoines relatifs à tous les coéchangistes sont parallèles à la variété:

$$U = s + p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n$$

Les prix sont par conséquent égaux aux coefficients directeurs de la direction normale commune à ces variétés parallèles. Nous appélerons les équations (3,2) équations de contact.

En résumé, les équations générales de l'équilibre économique peuvent être groupées en trois catégories: équations de bilan, équations de contact et équations de conservation.

4. M. Divisia [2, p. 384 et suiv.] obtient que la théorie de l'équilibre économique fournit une équation de moins que d'inconnues. Ce résultat, en contradiction avec les résultats classiques, provient du fait que M. Divisia (p. 424) croit pouvoir démontrer que « la monnaie uniquement

[1]) Confronter Irving Fisher (4, p. 77—78) et A. de Pietri Tonelli (8, p. 224).

considérée comme *moyen d'échange* n'a pas d'ophélimité ». Par conséquent les utilités totales ou les ophélimités totales des patrimoines sont indépendantes de la monnaie. Cet auteur écrit donc (2, p. 383) l'équation du bilan (3,1) sans le terme s^i. Il s'eu suit que les prix sont déterminés par des équations homogènes donc à un même facteur près. Tout se passe comme pour les courbes algébriques, quand on détermine leurs points d'interséction en coordonnées courantes ou en coordonnées homogènes.

5. De premier abord la théorie de l'équilibre économique semblerait nous donner des indications concernant le meilleur système à choisir: économie individualiste, économie des classes sociales ou économie totalitaire. Il n'en est rien.

À cet effet plaçons-nous successivement dans ces trois points de vue différents et examinons la théorie de l'équilibre d'après chacune de ces trois doctrines.

L'économiste individualiste raisonnerait comme WALRAS et aboutirait ainsi aux mêmes équations de l'équilibre que nous.

Le doctrinaire des classes sociales diviserait les N coéchangistes en un certain nombre de classes sociales. Mettons que les N_1, premiers individus appartiennent à la première classe, les individus N_1+1 jusqu'à N_2 à une seconde classe et ainsi de suite, les individus à commencer par le $N_k + 1$ jusqu'à N à la dérnière classe. Pour ce doctrinaire l'échange doit se produire de telle manière que chacune des classes sociales obtienne le maximum d'utilité. Avec les notations du § 3 il aurait donc à chercher le maximum de chacune des sommes

$$\begin{aligned} s_1 &= U(P_1) \quad + U(P_1') \quad + \ldots + U(P_N') \\ s_2 &= U(P'_{N_1+1}) + U(P'_{N_1+2}) + \ldots + U(P'_{N_2}) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_{k+1} &= U(P'_{N_k+1}) + U(P'_{N_k+1}+2) + \ldots + U(P_N') \end{aligned}$$

les variables vérifiant de plus les équations (3.1) et (3.3).

Enfin, l'économiste totalitaire estime que par l'échange l'utilité totale pour la nation tout entière doit atteindre son maximum. Traduit annalytiquement ce principe revient à déterminer le maximum de la somme:

$$S = U(P_1') + U(P_2') + \ldots + U(P_N')$$

les inconnues étant toujours liées par les équations (3,1) et (3,3).

Il est bien facile de s'en apercevoir que le doctrinaire des classes sociales ainsi que l'économiste totalitaire retomberont sur les mêmes équations que l'économiste individualiste.

L'analyse mathématique ne suit donc point le pas du temps et répond invariablement à ses solliciteurs que le bien-être de l'individu fait le bien-être de sa classe sociale et de sa nation, tout entière.

Mais il y a pire encore. Aucun de ces trois systèmes économiques n'attenue l'effet des équations (3,1). Ces équations bien que nommées équations du bilan sont pourtant des véritables équations de la justice ou de la morale sociale, car elles expriment le postulat fondamental de cette justice ou morale, à savoir que chaque individu doit recevoir de la société autant ou tout au plus autant, qu'il lui en donne. Quelle est l'organisation humaine, à travers l'histoire, dont on peut affirmer sans être contredit avoir réalisé intégralement ce grand postulat? Et combien nous regrettons de ne pas pouvoir déduire de l'analyse qu'il existe un système qu'élimine ou rectifie ces équations.

Il y a là un de ces rares cas, sinon l'unique, où la science reste muette à nos appels d'angoissés et nous livre impitoyablement à nous-mêmes, à notre propre libre arbitre.

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA DYNAMIQUE DES PRIX ET DE LA STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE ÉCONOMIQUE

6. Je commence l'étude de la stabilité de l'équilibre économique par considérer le cas où l'on suppose que l'utilité finale ou marginale de la monnaie est constante et égale à l'unité. $\Phi(s, x_1, \dots x_n; t)$ étant toujours la fonction utilité totale, cette hypothèse revient à admettre que l'on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0$$

ou

$$U \equiv s + \varphi(x_1, \dots x_n; t)$$

On suppose encore comme au § 2, que la fonction φ este développable en série Taylor, dans les mêmes conditions que la fonction Φ.

Admettons que l'équilibre soit établi à l'instant t, avec les prix $p_1, \dots p_n$ pour les n richesses en présence et examinons par continuité, ce qui va se produire à l'instant $t + \Delta t$ infiniment voisin de t.

Employant les notations du § 3, au moment t, le patrimoine P_i de l'individu i est composé des richesses suivantes:

$$\sigma_i, \alpha_i, \dots \lambda_i \qquad (i = 1, 2, \dots N)$$

Puisqu'il y a équilibre, on a d'après (3,2)

$$(6,1) \qquad 1 = \frac{(\alpha)_i}{p_1} = \frac{(\beta)_i}{p_2} = \dots = \frac{(\lambda)_i}{p_n} \quad (i = 1, 2 \dots N)$$

où l'on a mis pour bréviation

$$(\alpha)_i = \frac{\partial \varphi\,(\alpha_i,\ \beta_i, \ldots\ \lambda_i;\ t)}{\partial \alpha}$$

$$(\beta)_i = \frac{\partial \varphi\,(\alpha_i,\ \beta_i, \ldots\ \lambda_i;\ t)}{\partial \beta_i}$$

$$(\lambda)_i = \frac{\partial \varphi\,(\alpha_i,\ \beta_i, \ldots\ \lambda_i;\ t)}{\partial \lambda_i}$$

Depuis t jusqu'à $t + \Delta t$, chacun des N coéchangistes a produit des nouvelles richesses ou en a consommé sur celles qu'il possède. Soit:

$$\sigma_i,\ \alpha_i + \Delta\alpha_i,\ \beta_i + \Delta\beta_i, \ldots\ \lambda_i + \Delta\lambda_i \quad (i = 1, 2 \ldots\ N$$

ce qui est devenu au moment $t + \Delta t$ le patrimoine du i-ème coéchangiste. Par suite de cette modification de leurs patrimoines, les coéchangistes vont procéder à un nouvel échange. À ce même moment $t + \Delta t$ les prix étant devenus:

$$p_1 + \Delta p_1,\ p_2 = \Delta p_2, \ldots\ p_n + \Delta p_n$$

l'équilibre se rétablira, le patrimoine du i-ème coéchangiste devenant à la suite du nouvel échange:

$$\sigma_i + \delta\sigma_i,\ \alpha_i + \Delta\alpha_i + \delta\alpha_i,\ \beta_i + \Delta\beta_i + \delta\beta_i, \ldots,\ \lambda_i + \Delta\lambda_i + \delta\lambda_i \quad (i = 1,2 \ldots\ N_i$$

Désignons par P_i ce dernier patrimoine.

Dans le problème posé pour le moment $t + \Delta t$, les $\Delta\alpha_i$, $\Delta\beta_i \ldots\ \Delta\lambda_i$ doivent être considérées comme étant données puisqu'elles représentent la consommation et la production pendant l'intervalle Δt de temps. Les inconnues du problème sont maintenant les accroissements Δp_1, $\Delta p_2 \ldots\ \Delta p_n$ des prix et les variations $\delta\sigma_i$, $\delta\alpha_i$, $\delta\beta_i$, ..., $\delta\lambda_i$ des numéraires et des quantités.

Ces nouvelles inconnues vérifient des équations analogues à (3,1), (3,2), (3,3) établies précédemment. Ainsi les équations (3,1) deviennent à présent

$$\delta\sigma_i + (p_1 + \Delta p_1)\ \delta\alpha_i + (p_2 + \Delta p_2)\ \delta\beta_i + \ldots + (p_n + \Delta p_n)\ \delta\lambda_i = 0$$

ou en négligeant les infiniments petits à partir du seconde ordre

$$(6,2) \qquad \delta\sigma_i + p_1\ \delta\sigma_i + p_2\ \delta\beta_i + \ldots + p_n\ \delta\lambda_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots N)$$

De même, les équations (3,3) deviennent:

$$(6,3)\qquad \begin{aligned} &\delta\alpha_1 + \delta\alpha_2 + \ldots + \delta\alpha_N = 0\\ &\delta\beta_1 + \delta\beta_2 + \ldots + \delta\beta_N = 0\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\delta\lambda_1 + \delta\lambda_2 + \ldots + \delta\lambda_N = 0 \end{aligned}$$

L'équation relative aux $\delta\sigma$ n'étant pas distincte des équations (6,2) et (6,3) n'est plus reproduite.

Enfin, les équations (3,2) peuvent être écrites dans ce cas

$$1 = \frac{\dfrac{\partial U(P_i^*)}{\partial\alpha_i}}{p_1 + \Delta p_1} = \frac{\dfrac{\partial U(P_i^*)}{\partial\beta_i}}{p_2 + \Delta p_2} = \ldots = \frac{\dfrac{\partial U(P_i^*)}{\partial\lambda_i}}{p_n + \Delta p_n}.$$

Développons maintenant les dérivées des numérateurs en série TAYLOR. Faisons-y les réductions qui résultent des relations (6,1) et négligeons les infiniments petits à partir du seconde ordre. On obtient:

$$(6,4)\qquad \begin{aligned} \Delta p_1 &= (\alpha\alpha)_i(\Delta\alpha_i + \delta\alpha_i) + (\alpha\beta)_i(\Delta\beta_i + \delta\beta_i) + \ldots +\\ &\quad + (\alpha\lambda)_i(\Delta\lambda_i + \delta\lambda_i) + \frac{\partial(\alpha)_i}{\partial t}\Delta t\\ \Delta p_2 &= (\beta\alpha)_i(\Delta\alpha_i + \delta\alpha_i) + (\beta\beta)_i(\Delta\beta_i + \delta\beta_i) + \ldots +\\ &\quad + (\beta\lambda)_i(\Delta\lambda_i + \delta\lambda_i) + \frac{\partial(\beta)_i}{\partial t}\Delta t\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \Delta p_n &= (\lambda\alpha)_i(\Delta\alpha_i + \delta\alpha_i) + (\lambda\beta)_i(\Delta\beta_i + \delta\beta_i) + \ldots +\\ &\quad + (\lambda\lambda)_i(\Delta\lambda_i + \delta\lambda_i) + \frac{\partial(\lambda)_i}{\partial t}\Delta t \end{aligned}$$

où on a posé:

$$\begin{aligned} (\alpha\alpha)_i &= \frac{\partial^2\varphi(\alpha_i, \beta_i, \ldots \lambda_i; t)}{\partial\alpha_i^2}\\ (\alpha\beta)_i &= \frac{\partial^2\varphi(\alpha_i, \beta_i, \ldots \lambda_i; t)}{\partial\alpha_i\,\partial\beta_i}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (\alpha t)_i &= \frac{\partial^2\varphi(\alpha_i, \beta_i, \ldots \lambda_i; t)}{\partial\alpha_i\,\partial t}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (\beta\beta)_i &= \frac{\partial^2\varphi(\alpha_i, \beta_i, \ldots \lambda_i; t)}{\partial\,\beta_i^2}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (\lambda t)_i &= \frac{\partial^2\varphi(\alpha_i, \beta_i \ldots x_i; t)}{\partial\lambda_i\,\partial t}. \end{aligned}$$

Le système (6,4) étant linéaire, on peut en tirer immédiatement les quantités $(\Delta\alpha_i + \delta\alpha_i)$, $(\Delta\beta_i + \delta\beta_i)$,... On obtient ainsi:

$$
\begin{aligned}
\Delta\alpha_i + \delta\alpha_i &= A_{11}^{(i)}\left[\Delta p_1 - \frac{\partial(\alpha)_i}{\partial t}\Delta t\right] + A_{12}^{(i)}\left[\Delta p_2 - \frac{\partial(\beta)_i}{\partial t}\Delta t\right] + \\
&\quad + \ldots + A_{1n}^{(i)}\left[\Delta p_n - \frac{\partial(\lambda)_i}{\partial t}\Delta t\right] \\
\Delta\beta_i + \delta\beta_i &= A_{21}^{(i)}\left[\Delta p_1 - \frac{\partial(\alpha)_i}{\partial t}\Delta t\right] + A_{22}^{(i)}\left[\Delta p_2 - \frac{\partial(\beta)_i}{\partial t}\Delta t\right] + \\
&\quad + \ldots + A_{2n}^{(i)}\left[\Delta p_n - \frac{\partial(\lambda)_i}{\partial t}\Delta t\right] \qquad (6,5) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta\lambda_i + \delta\lambda_i &= A_{n1}^{(i)}\left[\Delta p_1 - \frac{\partial(\alpha)_i}{\partial t}\Delta t\right] + A_{n2}^{(i)}\left[\Delta p_2 - \frac{\partial(\beta)_i}{\partial t}\Delta t\right] + \\
&\quad + \ldots + A_{nn}^{(i)}\left[\Delta p_n - \frac{\partial(\lambda)_i}{\partial t}\Delta t\right] \\
&\qquad (i = 1, 2, \ldots N)
\end{aligned}
$$

Les coefficients A_{ik} peuvent être facilement formés en fonction des coefficients du système (6,4).

En substituant les valeurs de $\Delta\alpha_i + \delta\alpha_i$, $\Delta\beta_i + \delta\beta_i$,... $\Delta\lambda_i + \delta\lambda_i$ ainsi obtenues dans les équations (6,3) on trouve pour les Δp un système linéaire de n équations à n inconnues.

La forme même des équations (6,3) fait apparaître comme évident un premier résultat riche en conséquences.

En effet, ajoutons terme à terme les premières équations (6,5) c'est-à-dire les équations dont le premier membre est $\Delta\alpha_i + \delta\alpha_i$ l'indice i prenant successivement les valeurs 1, 2,..., N. Puisque d'après la première des équations (6,3) on a

$$\delta\alpha_1 + \delta\alpha_2 + \ldots + \delta\alpha_N = 0$$

le résultat de cette addition peut s'écrire:

$$
\begin{aligned}
\Sigma\Delta\alpha_i &= \Delta p_1\, \Sigma A_{11}^{(i)} + \Delta p_2\, \Sigma A_{12}^{(i)} + \ldots + \Delta p_n\, \Sigma A_{1n}^{(i)} \\
&\quad - \Delta t\, \Sigma\left[A_{11}^{(i)}\frac{\partial(\alpha)_i}{\partial t} + A_{12}^{(i)}\frac{\partial(\beta)_i}{\partial t} + \ldots + A_{1n}^{(i)}\frac{\partial(\lambda)_i}{\partial t}\right] \qquad (6,6)
\end{aligned}
$$

sous tous les signes Σ l'indice i variant de 1 à N.

En répétant la même opération pour les équations en $\Delta\beta_i + \delta\beta_i, \ldots$, $\Delta\lambda_i + \delta\lambda_i$ on obtient des équations similaires, à savoir:

$$\Sigma\Delta\beta_i = \Delta p_1 \Sigma A_{21}^{(i)} + \Delta p_2 \Sigma A_{22}^{(i)} + \ldots + \Delta p_n \Sigma A_{2n}^{(i)}$$
$$- \Delta t \Sigma \left[A_{21}^{(i)} \frac{\partial (\alpha)_i}{\partial t} + A_{22}^{(i)} \frac{\partial (\beta)_i}{\partial t} + \ldots + A_{2n}^{(i)} \frac{\partial (\lambda)_i}{\partial t} \right].$$

(6,6) . . . . . .

$$\Sigma\Delta\lambda_i = \Delta p_1 \Sigma A_{n1}^{(i)} + \Delta p_2 \Sigma A_{n2}^{(i)} + \ldots + \Delta p_n \Sigma A_{nn}^{(i)}$$
$$- \varphi t \Sigma \left[A_{n1}^{(i)} \frac{\partial (\alpha)_i}{\partial t} + A_{n2}^{(i)} \frac{\partial (\beta)_i}{\partial t} + \ldots + A_{nn}^{(i)} \frac{\partial (\lambda)_i}{\partial t} \right].$$

Le système d'équations ainsi obtenu détermine les variations Δp_1, $\Delta p_2, \ldots \Delta p_n$ des prix. Mais, les premiers membres de ces équations sont respectivement:

$$\Sigma\Delta\alpha_i = \Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2 + \ldots + \Delta\alpha_N$$
$$\Sigma\Delta\beta_i = \Delta\beta_1 + \Delta\beta_2 + \ldots + \Delta\beta_N$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Sigma\Delta\lambda_i = \Delta\lambda_1 + \Delta\lambda_2 + \ldots + \Delta\lambda_N.$$

Les variations des prix ne sauraient donc dépendre que des sommes $\Sigma\Delta\alpha_i$, $\Sigma\Delta\beta_i, \ldots$ $\Sigma\Delta\lambda_i$ et non pas de quelques-uns des termes de ces sommes pris isolément. Autrement dit: *à partir d'une position d'équilibre, les variations totales des quantités déterminent les variations des prix.*

Nous pouvons ajouter de plus, qu'à partir d'une position d'équilibre, les petites variations des quantités entraînent pour les prix, aussi des petites variations. Inversement, si à l'instant t l'équilibre n'est pas réalisé on peut s'attendre pour l'instant $t + \Delta t$ à des sauts brusques des prix, ou à des discontinuités dans leur variation. Ceci résulte suivant qu'au moment t les équations (6,1) sont valables ou non.

Les variations des prix étant déterminées, les valeurs des accroissements $\delta\alpha_i$, $\delta\beta_i \ldots$ $\delta\lambda_i$ se déduisent des équations (6,5) après y avoir remplacé les Δp_1, $\Delta p_2 \ldots$ Δp_n par leurs valeurs calculées.

La solution du problème de l'équilibre, pour l'instant $t + \Delta t$ est ainsi achevée, bien entendu à des infiniments petits du second ordre, près.

Les systèmes d'équations (6,5) et (6,6) constituent les équations de la dynamique des prix, puisqu'elles permettent, étant connus à l'instant t les prix et les patrimoines, ainsi que les variations totales des quantités (production-consommation) pendant l'intervalle Δt, de déterminer pour l'instant $t + \Delta t$, la position d'équilibre du système, ou les nouveaux prix et les nouveaux patrimoines.

7. Je dirai dans la suite qu'il y a stabilité de l'équilibre, s'il y a invariabilité des prix pendant une petite durée de temps. En d'autres termes, je pose par définition que l'équilibre est stable, si aux instants t et $t + \Delta t$ les prix restent les mêmes à des infiniments petits du second ordre près. Les équations de la stabilité de l'équilibre économique sont donc:

$$\Delta p_1 = \Delta p_2 = \ldots = \Delta p_n = 0 \tag{7,1}$$

La stabilité de l'équilibre étant ainsi définie, je me propose d'étudier, s'il est possible de la réaliser.

Je remarque d'abord qu'en tenant compte des équations (7,1) on déduit des équations (6,6) un système unique de valeurs pour les $\Sigma\Delta\alpha_i$, $\Sigma\Delta\beta_i \ldots$ $\Sigma\Delta\lambda_i$. Ceci revient à dire que *la stabilité de l'équilibre économique exige une coordination bien parfaite entre production et consommation.* L'économie dirigée trouve ainsi, dans les considérations analitiques qui précèdent, un argument objectif singulièrement puissant en sa faveur.

Examinons maintenant le cas particulier, où l'on suppose que la fonction utilité totale, c'est-à-dire la fonction φ du § 6 est indépendante de temps. Sous cette hypothèse restrictive, les dérivées par rapport à t disparaissent de nos formules, et les équations (6,6) deviennent simplement:

$$\begin{aligned}
\sum_1^N \Delta\alpha_i &= \Delta p_1 \sum_1^N A_{11}^{(i)} + \Delta p_2 \sum_1^N A_{12}^{(i)} + \ldots + \Delta p_n \sum_1^N A_{1n}^{(i)} \\
\Sigma\Delta\beta_i &= \Delta p_1 \sum_1^N A_{21}^{(i)} + \Delta p_2 \sum_1^N A_{22}^{(i)} + \ldots + \Delta p_n \sum_1^N A_{2n}^{(i)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sum_1^N \Delta\lambda_i &= \Delta p_1 \sum_1^N A_{n1}^{(i)} + \Delta p_2 \sum_1^N A_{n2}^{(i)} + \ldots + \Delta p_n \sum_1^N A_{nn}^{(i)}
\end{aligned} \tag{7,2}$$

Si les conditions (7,1) de la stabilité de l'équilibre sont remplies, il résulte des équations (7,2) que l'on a aussi:

$$\sum_1^N \Delta\alpha_i = \sum_1^N \Delta\beta_i = \ldots = \sum_1^N \Delta\lambda_i = 0. \tag{7,3}$$

Réciproquement, si les conditions (7,3) sont vérifiées il résulte du système (7,2) que les conditions (7,1) le sont également. *Donc, sous l'hypothèse de la non-intervention du temps dans la détermination de la valeur de l'utilité totale, la stabilité de l'équilibre économique exige l'équivalence complète entre production et consommation.*

Des équations (6,5) on tire, dans ce cas spécial, que l'on a:

$$\Delta\alpha_i + \delta\alpha_i = \Delta\beta_i + \delta\beta_i = \ldots = \Delta\lambda_i + \delta\lambda_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots N)$$

Donc à l'instant $t + \Delta t$ l'échange s'effectue de manière que chaque coéchangiste retrouve son patrimoine de l'instant t.

Peut-on réaliser pratiquement l'équivalence entre production et consommation? Certes non, pour la totalité des richesses. Ainsi, pour les services et les produits industriels, dont la création et la fabrication est continue, on peut admettre qu'il se réalise pendant l'intervalle de t à $t + \Delta t$, une compensation instantannée ou quasi, entre la production et la consommation. Pour certains autres produits, dont les plus importants sont les céréales, et dont la production ne s'effectue pas continuellement, mais à des périodes fixes, il n'en est plus ainsi. Pour ces derniers produits, les Δ ont le même signe — moins — car tous les coéchangistes en consomment et aucun d'eux n'en produit pas, sauf bien entendu à l'époque des récoltes.

Peut-on en conclure que la réalisation de la stabilité de l'équilibre est impossible? Nullement, car il suffit de rejetter l'hypothèse concernant l'indépendance de l'utilité totale par rapport au temps, pour que la stabilité en question redevienne possible.

Ainsi, commençons-nous, par diviser les richesses en deux groupes suivant que leur production est continue, dans le temps ou non, et admettons que l'utilité marginale des richesses du premier groupe est indépendante du temps, tandis que celle des richesses du second groupe ne l'est plus. Et, bornons-nous, afin d'éviter des complications d'écriture, au cas simple où il n'y aurait qu'une seule richesse de chaque groupe. Mettons pour fixer les idées, que les quantités α de nos équations soient relatives à l'acier et les quantités β au froment.

Puisque l'utilité finale de l'acier est supposée indépendante du temps, on a:

$$\frac{\partial (\alpha)_1}{\partial t} = \frac{\partial (\alpha)_2}{\partial t} = \ldots = \frac{\partial (\alpha)_N}{\partial t} = 0$$

et le système (6,4) se réduit maintenant à:

$$(7.4) \qquad \begin{aligned} \Delta p_1 &= (\alpha\alpha)_i(\Delta\alpha_i + \delta\alpha_i) + (\alpha\beta)_i(\Delta\beta_i + \delta\beta_i \\ \Delta p_2 &= (\beta\alpha)_i(\Delta\alpha_i + \delta\alpha_i) + (\beta\beta)_i(\Delta\beta_i + \delta\beta_i) + \frac{\delta (\beta)_i}{\delta t} At \quad (i = 1, 2, \ldots N) \end{aligned}$$

Or, les utilités marginales de l'acier et du froment sont indépendantes l'une de l'autre, parce qu'on ne peut pas remplacer le froment par de l'acier ou inversement. Et, cette observation reste vraie pour la presque

totalité des produits industriels par rapport aux céréales et aux autres produits saisonniers. On a, par conséquent:

$$(\alpha\beta)_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots N).$$

Du système (7,4) on tire:

$$\Delta\alpha_i + \delta\alpha_i = \frac{\Delta p_1}{(\alpha\alpha)_i}$$

$$\Delta\beta_i + \delta\beta_i = \frac{\Delta p_2 - \frac{\partial (\beta)_i}{\partial t}}{(\beta\beta)_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots N)$$

$$\therefore \quad \sum_1^N \Delta\alpha_i = \Delta p_1 \sum_1^N \frac{1}{(\alpha\alpha)_i}$$

$$\Sigma\Delta\beta_i = \Delta p_2 \sum_1^N \frac{1}{(\beta\beta)_i} - \Delta t \sum_1^N \frac{\frac{\partial (\beta)_i}{\partial t}}{(\beta\beta)_i}.$$

Les conditions (7,1) de la stabilité, exigent donc:

$$\sum_1^N \Delta\alpha_i = 0$$

(7,5)

$$\sum_1^N \Delta\beta_i + \Delta t \sum_1^N \frac{\frac{\partial (\beta)_i}{\partial t}}{(\beta\beta)_i} = 0.$$

La première des relations (7,5) exprime l'équivalence dont il a été question tout à l'heure entre la production et la consommation de l'acier.

D'autre part, on peut admettre que les consommations de froment de tous les N coéchangistes sont égales. Pour cette raison, je pose:

$$\Delta\beta_1 = \Delta\beta_2 = \ldots = \Delta\beta_N = -c\,\Delta t.$$

c étant une constante positive. Pour que la seconde équation (7,5) soit aussi vérifiée, il suffit de choisir la fonction utilité totale de manière à avoir

$$\frac{\partial (\beta)}{\partial t} = c\,(\beta\beta).$$

On trouve en définitive, pour la fonction U du § 6 l'expression suivante:

$$U = s + f_1(x_1) + f_2(x_2 + ct) - f_1(o) - f_2(ct)$$

f_1 et f_2 étant deux fonctions arbitraires [1]).

[1]) Les termes $f_1(o)$ et $f_2(c)$ sont introduits pour que l'on ait $U(0, 0, 0; t) = 0$. De plus, la fonction f_2 doit être supposée périodique, de période égale à une année, ou, ce qui revient au même, admettre que t varie dans un intervalle dont la longueur correspond à la durée d'un an.

La réalisation de la stabilité de l'équilibre économique est donc possible.

À priori, le résultat que nous venons d'obtenir était bien facile à prévoir. Avec leur bon sens et leur esprit de prévoyance les coéchangistes pouvaient y aboutir, sans avoir recours à aucune équation aux dérivées partielles, aussi simple fût-elle. Car, de toute évidence, ils pouvaient présumer que pour assurer la permanence des prix, il fallait produire autant d'acier qu'on en consommait et ensuite, qu'il fallait attribuer à la quantité x_2 de froment et à l'instant 0 la même utilité marginale qu'à la quantité $x_2 - ct$ restante au moment t, après que chacun d'eux aura couvert sa propre consommation depuis 0 jusqu'à t. En définitive l'utilité marginale du froment reste indépendante du temps, mais seulement après que chacun aura réservé la quantité nécessaire à sa consommation individuelle.

8. Le cas particulier que nous avons considéré, bien que fort simple est pourtant très instructif, car il confirme d'abord l'ensemble des hypothèses que nous avons été conduits à admettre. Ensuite, il fait entrevoir les différentes causes susceptibles de maintenir l'équilibre et, le cas échéant, d'engendrer les crises économiques.

En effet, la première des équations (7,5) montre que la stabilité de l'équilibre économique peut s'effondrer dès qu'il y a entre la production et la consommation des différences sensibles. Pratiquement, on ne réalise jamais une compensation complète et immédiate entre richesses produites et richesses consommées. Il y a toujours certaines réserves de produits non encore mis en circulation. À certaines époques ces réserves se trouvent être d'un ordre de grandeur de si minime importance qu'elles n'ont alors point d'influence sur la stabilité économique. Mais à d'autres époques, elles s'accumulent dans des proportions telles que l'équilibre économique en est ébranlé et par ce fait même, la crise se trouve déclenchée.

La périodicité des crises ainsi produites peut être expliquée par la durée plus ou moins constante, qui est indispensable pour que l'accumulation des richesses atteigne le niveau d'où elle peut influencer la stabilité.

La première des équations (7,5) limiterait toutefois, le maintien de l'équilibre ou le déclenchement des crises économiques à des causes se rapportant à des phénomènes purement économiques. La seconde des équations (7,5) fait pourtant y intervenir des causes bine plus complexes, dépassant de beaucoup les cadres de la vie économique.

Ainsi nous avons prouvé que cette équation est vérifiée sous la condition que les coéchangistes empruntent, pour l'évaluation d'utilité

totale de leurs patrimoines, une certaine manière de raisonner. Par cette méthode ou pratique, que les coéchangistes sont astreints à adopter, ils arrivent à donner à l'utilité totale une valeur certes objective, car tout coéchangiste possédant les mêmes quantités de monnaie ou crédit, d'acier et de froment accordera, sans suivre aucune préférence subjective, la même valeur pour l'utilité de son patrimoine. Mais cette valeur-là est soumise à l'influence du temps et, par conséquent, est variable avec le temps.

Ajoutons encore que cette dépendence entre l'utilité totale et le temps nous a été imposée par les conditions mêmes du problème. Sans l'admettre, l'existence de la stabilité économique resterait dépourvue de toute explication analytique.

Rappelons aussi, que dès le début de ce travail nous avons fait mention, que la continuité par rapport au temps, de la fonction utilité totale, ne saurait être assurée pour une très longue durée.

Mettons enfin, qu'il se produit un événement exceptionnel, qui décide les coéchangistes à modifier leur manière d'évaluer les patrimoines, ou, en revenant à notre exemple de tout à l'heure, ils peuvent apprécier à l'instant t, que la quantité $x_2 - ct$ de froment n'a plus la même utilité que la quantité x_2 à l'origine du temps, mais une toute autre utilité. Et s'il en est ainsi, à l'instant t, la stabilité économique s'est évanouie.

La crise ainsi commencée, durera jusqu'au moment où les coéchangistes reprendront leur ancienne méthode d'évaluation de l'utilité totale ou finale du froment et admettront à nouveau qu'à l'instant t, la quantité $x_2 - ct$ a la même utilité marginale que la quantité x_2 à l'origine, soit que cette utilité est exprimée par la fonction f_2 d'avant la crise, soit par toute autre fonction de la même forme, mais restant toujours à leur choix. Malheureusement, aucune équation de l'analyse mathématique ne peut révéler l'instant où les coéchangistes retrouveront la compréhension de leurs vrais intérêts.

On arrive ainsi, par voie analytique, à un principe que les économistes ont reconnu depuis bien longtemps: *les crises économiques tiennent à des causes purement économiques, comme à des facteurs psychologiques.*

Durant la dernière dépression économique mondiale, l'humanité toute entière a éprouvé, par ses propres souffrances, le bien-fondé de ce principe qui fait intervenir des éléments d'ordre psychologique dans nos avatars économiques.

9. La notion de stabilité de l'équilibre économique définie par les équations (7,1) n'est pas universellement valable. Cette notion, ainsi conçue, n'est applicable qu'au grands producteurs ou détenteurs des céréales ou d'autres richesses dont la production n'est pas continue dans le temps.

Pour les consommateurs, soit habitants des pays où il n'y a pas ou presque pas, de production de telles richesses, soit citadins des villes industrielles, la notion de stabilité économique revêt un autre aspect de beaucoup plus intuitif. Pour ceux là, stabilité économique veut dire, possibilité à tout instant de reconstituer leurs patrimoines antérieurs et aux mêmes prix ou, autrement possibilité de faire subsister à l'instant $t + \Delta t$ la situation économique de l'instant t. Avec nos notations, cette nouvelle définition de la stabilité de l'équilibre économique conduit à poser:

$$(9,1) \quad \Delta\alpha_i + \delta\alpha_i = \Delta\beta_i + \delta\beta_i = \ldots = \Delta\lambda_i + \delta\lambda_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots N)$$

ce qui exprime identité des patrimoines-richesses sauf numéraire et

$$(7,1) \qquad \Delta p_1 = \Delta p_2 = \ldots = \Delta p_n = 0$$

ou, invariabilité des prix à des infiniments petits du second ordre près, de t à $t + \Delta t$.

Il est bien évident qu'à son tour, cette seconde définition ne peut pas être admise pour la totalité des coéchangistes du monde entier, ou d'une même collectivité économique autarchique, close ou qui se suffit à elle-même. Car, pendant la durée t, il y a effectivement consommation de certaines richesses, que la production ne peut pas compenser et qui rend impossible le retour du système à sa position initiale. C'est précisément cette considération, qui nous a déterminé à indiquer d'abord pour la stabilité économique la première définition, quoique analytique, et non la seconde manifestement plus naturelle.

Dans le cas de consommateurs des pays non agricoles ou des grandes cités industrielles on ne peut pas invoquer l'impossibilité du retour à la position initiale. Ces consommateurs font continuellement venir de l'extérieur de leur collectivité économique les produits qu'ils ont consommé, de telle manière que pour leur cas spécial on peut admettre qu'il existe compensation entre la production ou l'achat à l'extérieur et la consommation de tous les produits, sans exception. De plus, nous n'avons pas à nous occuper si les prix résultant des équations de l'équilibre sont rémunérateurs pour le commerce de ces produits venus de l'extérieur, pas plus que les prix de toutes les autres richesses soumises à l'échange. La théorie de l'équilibre économique suppose le régime absolu du libre échange sans prendre en considération la notion de profit et les perturbations produits par les cartels, les monopoles, les trusts, etc.

Si l'on accepte pour la stabilité économique la seconde définition, il s'ensuit facilement une conséquence importante concernant l'utilité marginale de la monnaie.

Reprenons pour cela, la fonction utilité totale

$$U = \Phi(\sigma, x_1, x_2 \ldots x_n; t)$$

et suivons la même méthode qu'au § 6 pour établir les équations générales de la dynamique des prix. Posons, qu'à l'instant t l'équilibre s'est établi aux prix $p_1, p_2 \ldots p_n$, le coéchangiste i disposant du patrimoine

$$\sigma_i, \alpha_i, \beta_i \ldots, \lambda_i \qquad (i = 1, 2, \ldots N)$$

D'après les équations (3,2) on a:

$$(9,2) \qquad (\sigma)_i = \frac{(\alpha)_i}{p_1} = \frac{(\beta)_i}{p_2} = \ldots = \frac{(\lambda)_i}{p_n} \qquad (i = 1, 2, \ldots N).$$

où l'on designe toujours par $(\sigma)_i$, $(\alpha)_i, \ldots$ $(\lambda)_i$, les dérivées partielles

$$(\sigma)_i = \frac{\partial \Phi(\sigma_i, \alpha_i, \beta_i \ldots \lambda_i ; t)}{\partial \sigma_i}$$

$$(\alpha)_i = \frac{\partial \Phi(\sigma_i, \alpha_i, \beta_i \ldots \lambda_i ; t)}{\partial \alpha_i}$$

. . . . . .

$$(\lambda)_i = \frac{\partial \Phi(\sigma_i, \alpha_i, \beta_i \ldots \lambda_i ; t)}{\partial \lambda_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots N)$$

De t à $t + \Delta t$ les coéchangistes ont produit, acheté ou consommé les quantités $\Delta\alpha_i, \Delta\beta_i, \ldots \Delta\lambda_i$. Par le nouvel échange, qui a lieu à l'instant $t + \Delta t$, le patrimoine du coéchangiste i devient:

$$\sigma_i + \delta\sigma_i, \ \alpha_i + \Delta\alpha_i + \delta\alpha_i, \ \beta_i + \Delta\beta_i + \delta\beta_i, \ldots, \ \lambda_i + \Delta\lambda_i + \delta\lambda_i$$

Posons encore:

$$(\sigma\sigma)_i = \frac{\partial^2 \Phi(\sigma_i, \alpha_i, \beta_i, \ldots \lambda_i ; t)}{\partial \sigma_i^2}$$

$$(\sigma\alpha)_i = \frac{\partial^2 \Phi(\sigma_i, \alpha_i, \beta_i, \ldots \lambda_i ; t)}{\partial \alpha_i \, \partial \sigma_i}$$

. . . . . .

$$(\alpha\beta)_i = \frac{\partial^2 \Phi(\sigma_i, \alpha_i, \beta_i, \ldots \lambda_i ; t)}{\partial \alpha_i \, \partial \beta_i}$$

$$(\lambda t)_i = \frac{\partial^2 \Phi(\sigma_i, \alpha_i, \beta_i, \ldots \lambda_i ; t)}{\partial \lambda_i \, \partial t_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots N).$$

En formant les équations analogues à (6,4) on trouve:

$$
\begin{aligned}
p_1 [(\sigma\sigma)_i\, \delta\sigma_i + (\sigma\alpha)_i\, (\Delta\alpha_i + \delta\alpha_i) + (\sigma\beta)_i (\Delta\beta_i + \delta\beta_i) + \ldots \\
\ldots + (\sigma\lambda)_i (\Delta\lambda_i + \delta\lambda_i) + (\sigma t)_i\, \Delta t] \\
+ (\sigma)_i\, \Delta p_1 = (\alpha\sigma)_i\, \delta\sigma_i + (\alpha\alpha)_i (\Delta\alpha_i + \delta\alpha_i) + \ldots \\
\ldots + (\alpha\lambda)_i (\Delta\lambda_i + \delta\lambda_i) + (\alpha t)_i\, t\Delta \\
p_2 [(\sigma\sigma)_i\, \delta\sigma_i + (\sigma\alpha)_i\, (\Delta\alpha_i + \delta\alpha_i) + (\sigma\beta)_i (\Delta p_i + \delta\beta_i) + \ldots \\
\ldots + (\sigma\lambda)_i\, (\Delta\lambda_i + \delta\lambda_i) + (\sigma t)_i\, \Delta t] \\
+ (\sigma)_i\, \Delta p_2 = (\beta\sigma)_i\, \delta\sigma_i + (\beta\alpha)_i (\Delta\alpha_i + \delta\alpha_i) + \ldots \\
\ldots + (\beta\lambda)_i (\Delta\lambda_i + \delta\lambda_i) + (\beta t)_i\, \Delta t \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_n [(\sigma\sigma)_i\, \delta\sigma_i + (\sigma\alpha)_i\, (\Delta\alpha_i + \delta\alpha_i) + (\sigma\beta)_i (\Delta\beta_i + \delta\beta_i) + \ldots \\
\ldots + (\sigma\lambda)_i (\Delta\lambda_i + \delta\lambda_i) + (\sigma t)_i\, \Delta t] \\
+ (\sigma)_i\, \Delta p_2 = (\lambda\sigma)_i\, \delta\sigma_i + (\lambda\alpha)_i (\Delta\alpha_i + \delta\alpha_i) + \ldots \\
\ldots + (\lambda\lambda)_i (\Delta\lambda_i + \delta\lambda_i) + (\lambda t)_i\, \Delta t \\
(i = 1, 2, \ldots\ N).
\end{aligned}
$$

En tenant compte des équations (9,1) et (7,1) de la stabilité, ces dernières équations deviennent:

$$
(9{,}4)\qquad
\begin{aligned}
p_1 [(\sigma\sigma)_i\, \delta\sigma_i + (\sigma t)_i\, \Delta t] &= (\alpha\sigma)_i\, \delta\sigma_i + (\alpha t)_i\, \Delta t \\
p_2 [(\sigma\sigma)_i\, \delta\sigma_i + (\sigma t)_i\, \Delta t] &= (\beta\sigma)_i\, \delta\sigma_i + (\beta t)_i\, \Delta t \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_n [(\sigma\sigma)_i\, \delta\sigma_i + (\sigma t)_i\, \Delta t] &= (\lambda\sigma)_i\, \delta\sigma_i + (\lambda t)_i\, \Delta t \quad (i = 1, 2, \ldots N)
\end{aligned}
$$

Or ces équations devront être vérifiées identiquement quels que soient les prix p_1, p_2, $p_3, \ldots$, p_n, les variations $\delta\sigma_1$, $\delta\sigma_2, \ldots$ $\delta\sigma_N$ et l'intervalle Δt. On a:

$$
(9{,}5)\qquad
\begin{aligned}
&(\sigma\sigma)_i = (\alpha\sigma)_i = 0, \ldots, \ (\sigma\sigma)_i = (\sigma\lambda)_i = 0 \\
&(\sigma t)_i = (\alpha t)_i = 0, \ldots, \ (\sigma t)_i = (\lambda t)_i = 0. \quad (i = 1, 2, \ldots N).
\end{aligned}
$$

Les premières des équations (9,5) montrent que l'utilité marginale de la monnaie

$$
(s) = \frac{\partial \Phi\ (s, x_1, x_2 \ldots x_n;\ t)}{\partial s}
$$

est une constante, c'est-à-dire est indépendante de toute richesse, y compris la monnaie et le temps.

Il résulte ainsi que *toute théorie économique impliquant la variabilité de l'utilité finale de la monnaie est incompatible avec la théorie de* WALRAS *où l'on donne pour la stabilité de l'équilibre la seconde définition.* Et celle-là constitue la raison même qui justifie la forme particulière adoptée pour la fonction utilité totale au § 6. Car dans ma pensée tout modèle analytique de l'espace ou du monde économique, qui ne fait pas apparaître la possibilité de l'existence de la stabilité économique est dépourvu de toute valeur.

Pour la même raison, je continuerai, sauf mention spéciale, á supposer que l'utilité finale de la monnaie est égale à l'unité.

D'autre part, les secondes équations (9,5) montrent que les utilités finales des richesses y compris la monnaie sont indépendantes du temps. La deuxième définition que nous avons donnée pour la stabilité de l'équilibre économique, conduit donc à envisager le cas étudié au § 6 et § 7, où nous avons établi qu'à partir d'une position d'équilibre, les variations totales des quantités déterminent les variations des prix et que la stabilité économique éxige l'équivalence entre production et consommation.

Les considérations qui précèdent précisent également le champ des applications de la théorie de l'équilibre économique. Nous avons écrit au début du § 1 que, dans sa théorie, WALRAS a envisagé l'utilité de tout patrimoine de richesses *divisibles et mesurables.* Les développements précédents nous font voir bien clairement ce qu'on doit entendre par richesses *divisibles et mesurables.* Ce sont les richesses pour lesquelles existent des variations $\Delta\alpha_i$ et $\delta\alpha_i$ pendant l'intervalle de t à $t + \Delta t$, c'est-à-dire des richesses qu'on produit ou que l'on consomme continuellement. Si le froment et l'acier sont de telles richesses, il n'en pas ainsi de la terre qui produit le blé, ni des actions ou valeurs qui constituent le capital de l'usine où l'acier est fondu. La théorie de l'équilibre économique de WALRAS-PARETO n'embrasse donc pas, ni les immeubles ni les valeurs en bourse, ni le capital, ni tout autre bien, tels les brevets d'invention, droits d'auteur, objets d'art, etc., dont on ne peut pas définir la variation en quantité pendant une durée de temps arbitraire.

LA SOLUTION DU PATRIMOINE MOYEN

10. Je reviens maintenant aux équations (6,1) et à leur interprétation géométrique donnée à la fin du § 3.

Pour plus de clarté je rappelle que les équations

$$(6,1) \qquad 1 = \frac{(\alpha)_i}{p_1} = \frac{(\beta)_i}{p_2} = \ldots = \frac{(\lambda)_i}{p_n} \qquad (i = 1, 2, \ldots N)$$

expriment que les variétés planes tangentes à la variété de l'espace à $n + 2$ dimensions:

$$U = s + \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n; t)$$

aux points:

$$M_i(U_i, \sigma_i, \alpha_i, \beta_i, \ldots \lambda_i; t) \qquad (i = 1, 2, \ldots N)$$

avec

$$U_i = \sigma_i + \varphi(\alpha_i, \beta, \ldots \lambda_i; t)$$

sont parallèles à la variété

$$U = s + p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n.$$

(Dans ces équations t représente un paramètre et non pas une coordonnée. Il va sans dire que les valeurs singulières de t sont exclues).

Puisque le long de la droite:

$$x_1 = \alpha, \; x_2 = \beta \ldots, \; x_n = \lambda$$

les variétés planes tangentes sont parallèles, la variable s n'intervient plus dans la suite. Il est par conséquent plus commode de considérer à la place de la variété U la variété à une dimension de moins:

$$U = \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n; t) \qquad (10,1)$$

et de retenir qu'aux points A_i $(U_i, \alpha_i, \beta_i \ldots \lambda_i; t)$ avec $U_i = \varphi(\alpha_i, \beta_i \ldots \lambda_i; t)$ les variétés planes tangentes sont parallèles.

Cela étant, une première constatation s'impose. Si l'on se donne les prix $p_1, p_2 \ldots p_n$ les points A_i ne peuvent avoir sur la variété U d'équation (10,1) qu'un nombre ρ de positions, déterminé par la fonction φ et indépendant de N.

Je montre d'abord que le nombre ρ est fini. En effet, si la variété U est algébrique, il est bien connu que ce nombre est fini. Si la variété U n'est pas algébrique, le nombre ρ peut devenir infini. Mais dans ce cas la suite des points A_i ne peut pas s'étendre à l'infini. Car, s'il en était ainsi les prix $p_1, p_2 \ldots p_n$ seraient nuls, comme il résulte des équations (6,1) en tenant compte que les utilités marginales $(\alpha)_i$ $(\beta)_i \ldots (\lambda)_i$ s'annulent pour les grandes valeurs des quantités où, si nos variables tendent vers l'infini. D'autre part, la suite des points A_i ne peut avoir non plus aucun point d'accumulation à distance finie. Dans le voisinage d'un tel point la fonction φ cesserait d'avoir de développement Taylor, ce qui est en contradiction avec nos hypothèses. La suite des points A_i ne pouvant avoir de point d'accumulation ni à l'infini, ni à distance finie, comprend donc un nombre fini de points.

Tant que la fonction φ n'est pas précisée davantage, il semble bien difficile qu'on puisse dire plus concernant ρ.

Je remarque pourtant, que si immédiatement avant l'échange — à l'instant « $t - o$ » les patrimoines, en richesses sauf monnaie sont:

$$A_i(\alpha_i, \beta_i \ldots \lambda_i; t - o) \qquad (i = 1, 2, \ldots N)$$

après l'échange, à l'instant « $t + o$ » ces patrimoines peuvent devenir

$$A_i[E(\alpha), E(\beta), \ldots E(\lambda); t + o] \qquad (i = 1, 2, \ldots N)$$

où l'on désigne, par E le symbole de la moyenne, ainsi:

$$E(\alpha) = \frac{1}{N}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N)$$

$$E(\beta) = \frac{1}{N}(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_N)$$

. . . . . .

$$E(\lambda) = \frac{1}{N}(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_N)$$

J'appelle cette solution, la solution du *patrimoine moyen* et il est bien entendu que dans ce patrimoine moyen aucun disponible, en monnaie ou crédit, n'y figure pas.

La solution du patrimoine moyen est toujours une des solutions possibles du problème de l'équilibre économique. Cela résulte manifestement des équations de contact (6,1). De plus, il est aisé de s'assurer que *l'extremum* (voir plus haut § 2) déterminé par cette solution donne un maximum effectif pour la fonction utilité totale, à condition — et je le suppose — que la variété d'équation (10,1) soit pour les valeurs positives des variables x_1, $x_2 \ldots x_n$ constamment en dessous de sa variété plane tangente.

Je dois ajouter qu'il ne m'est pas possible de fournir une démonstration rigoureuse pour montrer que la solution du patrimoine moyen constitue *la seule* solution du problème de l'équilibre économique. Mais il est possible de démontrer que si à l'instant t cette solution est réalisée, elle le sera aussi à l'instant $t + \Delta t_1$ et par conséquant elle subsistera jusqu'à la plus approchée des valeurs singulières du temps.

Supposons à cet effet qu'à l'instant t, tous les coéchangistes possèdent les mêmes quantités de biens. Les patrimoines ne diffèrent donc d'un coéchangiste à l'autre, que par les sommes disponibles. Je dis que s'il est ainsi, les patrimoines resteront identiques — sauf disponible — au moment $t + \Delta t$.

Or, il est clair, que si Δt est suffisamment petit, les accroissements $\Delta\alpha_i$, $\Delta\beta_i \ldots \Delta\lambda_i$ et $\delta\alpha_i$, $\delta\beta_i \ldots \delta\lambda_i$ le sont aussi. Les points

$$B_i(\alpha_i + \Delta\alpha_i + \delta\alpha_i, \beta_i + \Delta\beta_i + \delta\beta_i, \ldots \lambda_i + \Delta\lambda_i + \delta\lambda_i ; t + \Delta t)$$

se trouvent donc contenus dans une portion ω aussi petite qu'on le voudra, de l'espace des x_1, $x_2 \ldots x_n$. La portion ω détermine sur la variété

$$U = \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n; t + \Delta t)$$

un petit élément (Ω) sur lequel il ne se trouve pas deux ou plusieurs points dont les variétés planes tangentes soient parallèles. Car, il est évident que s'il était autrement pour un élément (Ω) aussi petit qu'on le veut, le nombre ρ de tout à l'heure ne serait plus fini. Quand l'équilibre se réalise, les points B ne peuvent avoir qu'une seule position sur l'élément (Ω). Donc ces points coïncident et la solution du patrimoine moyen subsiste aussi à l'instant $t + \Delta t$.

Aussi paradoxale qu'elle puisse sembler à première vue, la solution *patrimoine moyen* est bien d'accord, avec l'hypothèse de WALRAS et se trouve confirmée, assez suffisamment, dans la pratique. En effet, il est tout naturel, que dans leur objectivité, les coéchangistes de WALRAS, trouvent le maximum d'utilité dans des patrimoines identiques et si un d'eux estime que tel patrimoine répond mieux à ses intérêts individuels, tous les autres en soient du même avis.

D'autre part, la pratique confirme, que pendant les périodes de stabilité économique, les consommateurs ne gardent jamais des quantités massives de marchandises. On n'accumule des provisions, qu'au moment où l'on craint soit la hausse des prix, soit l'impossibilité de s'approvisionner à son gré. L'opulent financier comme le petit ouvrier qui gagne honnêtement son existence, disposent toujours des quantités à peu près égales et justes pour assurer la consommation immédiate.

L'opulent financier a certainement tendance à entasser des richesses, mais non pas des biens de consommation. Ses préférences ou ses intérêts iront mieux vers des immeubles, ou des valeurs en bourse, ou des objets d'art, etc., c'est-à-dire précisément vers des richesses qui échappent aux théories de WALRAS et de PARETO.

On peut donc affirmer, sans crainte du démenti, que la solution du *patrimoine moyen* est la solution la plus probable de l'équilibre économique, tout au moins pour les temps où la stabilité de cet équilibre existe.

11. La solution du patrimoine moyen est susceptible d'apporter une confirmation analytique à certaines théories ou faits économiques consacrés par l'observation.

Premièrement, la théorie quantitative des prix.

Soient:

(11,1) $$E(\alpha), E(\beta) \ldots E(\lambda)$$

les quantités de richesses formant le patrimoine moyen à l'instant t.

Soient encore:

$$\Sigma\Delta\alpha,\ \Sigma\Delta\beta,\ldots\ \Sigma\Delta\lambda \tag{11,2}$$

les variations totales des quantités depuis t jusqu'à $t + \Delta t$. D'après la solution du patrimoine moyen à l'instant ce patrimoine devient:

$$E(\alpha + \Delta\alpha),\ E(\beta + \Delta\beta),\ldots\ E(\lambda + \Delta\lambda).$$

Si toutes les variations totales (11,2) sont positives, il y a abondance de richesses offertes et les prix baissent, puisque les utilités marginales sont des fonctions décroissantes, par rapport aux quantités (voir § 2). De même, si toutes ces variations totales (11,2) sont négatives, les prix montent.

Plus encore, supposons qu'à l'instant t' les moyennes (11,1) sont toutes plus petites que les mêmes moyennes à l'instant t''. Si, de plus, les variations totales (11,2) de t' à $t' + \Delta t'$ sont égales à celles de t'' à $t'' + \Delta t''$, les prix sont à l'instant $t' + \Delta t'$ plus grands, que ceux de l'instant $t'' + \Delta t''$, bien que les offres à ces deux moments soient les mêmes. Cela tient toujours aux équations (6,1) et au fait que les utilités marginales (α), $(\beta),\ldots,(\lambda)$ sont des fonctions décroissantes. La demande est à l'instant $t' + \Delta t'$ plus grande qu'à l'instant $t'' + \Delta t''$, puisque l'utilité marginale des différentes richesses l'est aussi.

Il est à observer que le peu de connaissances dont nous disposons concernant la fonction utilité totale nous oblige, pour pouvoir décider du sens du mouvement des prix, de savoir que toutes les variations totales sont du même signe ou que toutes les moyennes (11,1) sont plus petites ou plus grandes à un moment qu'à l'autre. Toutes ces conditions ne sont nullement nécessaires. Ces conditions sont seulement suffisantes. La fonction utilité totale restante arbitraire, il n'est pourtant pas possible de les réduire à leur nombre minimum.

12. La solution du patrimoine moyen, fait apparaître pour les équations (3,1) du bilan, leur vrai rôle dans la formation de l'équilibre économique.

Pour M. le Pr. François Perroux [6, p. 299—300] ces équations sont dépourvues de toute valeur explicative, n'ayant qu'un rôle purement analytique.

Ces équations révèlent pourtant l'existence d'un facteur extrêmement important pour la réalisation de l'équilibre économique à savoir l'état général de fortune ou de pauvreté de la collectivité des coéchangistes.

Examinons pour cela, le problème de l'équilibre pour une nation où un groupe quelconque de coéchangistes, pour lequel est valable

indifférement la première ou la seconde définition de la stabilité économique. Il est évident d'après la solution du patrimoine moyen que le maintien de l'équilibre économique exige de la part des consommateurs appartenant à la nation ou au groupe considéré, la dépense des mêmes sommes, en numéraire. Si le niveau général de la fortune est suffisamment élevé ces dépenses pourront être supportées par les consommateurs. Si non la pauvreté collective constituera un obstacle pour la stabilité économique.

L'équilibre économique est donc plus précaire dans les pays pauvres que dans les pays riches ou tout au moins détentrices des capitaux plus importants. C'est là un fait expérimental maintes fois observé et confirmé aussi recemment pendant la dernière dépression mondiale, où les effets du cataclysme ont été de beaucoup moins graves dans certains pays, créanciers du monde que dans les autres dont des réserves en capitaux étaient moins solides.

13. Je passe maintenant à l'étude de la loi circulatoire de la monnaie, ou équation des échanges. Cette loi a été formulée par Simon Newscomb. Aux États Unis, elle a été soumise à des vérifications statistiques très étendues et M. le Pr. Irving Fisher [5] a fait à son sujet, des études approfondies. Plus récemment, M. Divisia [2, p. 265—275] lui a donné une forme spéciale ou *instantanée* suivant l'expression de M. le Pr. Evans [3, p. 12].

J'utiliserai ici, cette dernière forme donnée par M. Divisia.

Considérons avec cet auteur, les quantités:

$$q_1, q_2 \cdots q_n ,$$

de tous les services et de toutes les marchandises intervenues [1]) dans les transactions donnant lieu à des paiements à l'époque t sur un marché déterminé. Soient:

$$p_1, p_2 \cdots p_n$$

les prix respectifs. On définit la circulation c par l'égalité

$$c = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_n q_n$$

Les quantités q_i et les prix p_i étant variables par rapport au temps, la loi circulatoire de la monnaie est donnée par l'équation

$$\frac{dc}{c} = \frac{da}{a} + \frac{dI}{I} \tag{13,1}$$

où l'on pose:

$$\frac{da}{a} = \frac{\Sigma p_i \, dq_i}{\Sigma p_i \, q_i} \quad , \quad \frac{dI}{I} = \frac{\Sigma q_i \, dp_i}{\Sigma p_i \, q_i}$$

a représentant un indice d'activité et I un indice des prix.

[1]) Divisia [2, p. 269].

L'équation (13,1) exprime une loi et non pas une simple identité, en ce sens que détermine la circulation c par le produit de l'indice a d'activité, de l'indice I des prix et d'une constante arbitraire d'intégration.

Ceci dit, je me propose de montrer que toute loi économique (L) tendant à établir une correspondance entre prix et quantité de services ou de marchandises « donnant lieu à des paiements » est incompatible avec le théorie de WALRAS-PARETO.

En particulier, résultera que I ne peut constituer un élément essentiel, intrinsèque pour la détermination du niveau des prix ou de la valeur de la monnaie.

À cet effet, il suffit de montrer sur un cas particulier, que toute loi (L) peut être mise en défaut. Et c'est précisément la solution du patrimoine moyen qui nous fournit ce cas là.

Imaginons, qu'à l'instant t, l'équilibre économique étant établi, les N coéchangistes possèdent des patrimoines identiques, composés uniformément par les mêmes quantités de marchandises ou services:

$$E(\alpha),\ E(\beta),\ldots\ E(\lambda)$$

du § 10. Désignons, comme toujours, par:

$$\Sigma\Delta\alpha,\ \Sigma\Delta\beta,\ldots\ \Sigma\Delta\lambda$$

les variations totales de ces marchandises ou services pendant l'intervalle Δt de temps.

Nous avons montré — voir les équations (6,6) — qu'à partir de la position d'équilibre les variations totales des quantités déterminent un systhème unique de valeurs pour les variations des prix.

Or, toute loi (L) est en contradiction avec ce dernier résultat, puisque les quantités de services ou de marchandises donnant lieu à des paiements à l'instant $t + \Delta t$ peuvent avoir des valeurs variables, tandis que les variations totales $\Sigma\Delta\alpha,\ \Sigma\Delta\beta,\ldots\ \Sigma\Delta\lambda$ restent constantes.

Pour le voir il suffit de prendre un exemple concret. Mettons qu'il y ait $N = 1.000$ coéchangistes, disposant chacun à l'instant t d'une quantité $E(\alpha) = 10$ unités, d'une marchandise quelconque et que leur consommation pendant Δt est de 2 unités pour chaque coéchangiste, ou en total 2.000 unités. De plus, supposons que pendant le même intervalle on a produit 2.000 nouvelles unités. Après l'échange qui s'effectuera à l'instant $t + \Delta t$, tous les coéchangistes retrouvent le même nombre 10 d'unités qu'à l'instant t. Maintenant il est facile de voir que s'il y a un seul producteur, le nombre d'unités *donnant lieu à des paiements* est 1998, s'il y en a deux ce nombre devient 1996, etc.

Pour la même raison, l'indice I ou tout autre, faisant intervenir des quantités effectivement mises en circulation, est aussi incompatible avec la théorie de l'équilibre économique.

Tout en étant incompatible avec les théories de WALRAS-PARETO, la loi circulatoire de la monnaie n'en garde pas moins sa valeur, car cette loi qu'on n'a jamais démontrée rigoureusement, reste une loi empirique d'une utilité indiscutable. Le peu de précision qu'il nous est possible de mettre dans la mesure des phénomènes économiques, rend pratiquement négligeable toute erreur provenant de l'emploi de cette loi circulatoire.

LA VÉRIFICATION EXPÉRIMENTALE DES LOIS DE L'ÉQUILIBRE ÉCONOMIQUE

14. Il est évident qu'entre l'équilibre économique défini par la théorie analytique et celui observé dans la pratique des affaires, il existe des différences profondes.

À ce sujet, je peux dire sans crainte du paradoxe que la réfutation la plus dangereuse de cette théorie consisterait justement à faire valoir que ses résultats numériques coïncident avec la réalité tangible. Si par malheur la résolution des 5.209 équations dont parle M. le Pr. PIETRI TONELLI dans le texte auquel fait allusion M. le Pr. EVANS nous conduisait à obtenir les prix du jour, les applications mathématiques aux théories de l'économie politique, seraient définitivement compromises.

Et, j'ai hâte d'ajouter que ce ne sera pas de sitôt. Car, avant de les résoudre, il faut commencer par écrire les 5.209 équations. Et cela n'est point possible et ne le sera pas encore pour un certain temps à venir puisqu'on ne connaît pas la fonction utilité totale. Toute la théorie est bâtie sur l'hypothèse que cette fonction existe. Mais personne ne l'a identifiée jusqu'à ce jour.

Même si la fonction utilité totale était connue avec toute la précision désirée, les différences entre résultats des calculs et observations pratiques n'en substiterait pas moins. Car ces différences tiennent à des causes importantes qu'il n'est pas possible d'éluder.

On peut grouper ces causes dans deux grandes catégories: causes d'ordre matériel et causes d'ordre moral.

Dans un livre récent M. le Pr. HENRI DENIS [1, p. 1—14] analyse les hypothèses qu'on doit admettre pour que la théorie de l'équilibre ait un sens. Il fait voir également les causes qui rendent malaisée la réalisation pratique de ces hypothèses. Celles-ci sont justement les causes

d'ordre matériel qui font impossible l'équilibre économique parfait, idéal. Concernant ces équations je me contente donc, de renvoyer à cet excellent travail.

J'ajouterai pourtant à l'énumération de M. Henri Denis deux autres causes, que les considérations précédentes ont mis en évidence. C'est la pauvreté générale de la collectivité des coéchangistes et l'impossibilité de réaliser pratiquement la solution du patrimoine moyen.

En effet, nous avons montré plus haut (§ 12), que faute de disponible, certains parmi les coéchangistes pourraient se trouver dans l'impossibilité de faire l'acquisition des richesses nécessaires pour que l'équilibre soit obtenu.

D'autre part, il va sans dire, que la solution du patrimoine moyen, ne peut être pratiquement réalisée que d'une manière bien approximative. Notre vie est ainsi organisée pour qu'il ne soit pas possible de nous procurer toujours le patrimoine moyen respectif. Au moment des récoltes nous ne pouvons pas nous approvisionner avec des céréales, pour toute l'année, et nous ne pouvons pas continuellement acheter les quantités de produits industriels qui nous reviennent. Il y aura donc toujours des commerçants, des dépositaires, des intermédiaires qui disposeront de quantités de certaines marchandises, dépassant de beaucoup la moyenne et par contre des indigents dont le patrimoine ne pourra pas atteindre cette même moyenne.

Passons maintenant aux causes d'ordre moral.

Celles-ci sont bien simples à résumer, car l'homme diffère — ou tout au moins nous devons l'affirmer jusqu'à la preuve du contraire — du coéchangiste de Walras. Selon le mot de Bentham: « La nature a mis le genre humain au pouvoir de deux souverains, le plaisir et la peine ». Il n'écoute donc pas uniquement ses intérêts individuels, comme Walras prétend le savoir.

Qu'il y ait des époques où l'humanité renonce à être gouvernée, par le seul calcul hédonistique, où elle s'élève au-dessus de ses intérêts, cela ne fait pas de doute, car les crises économiques le montrent clairement. Le vers du poète: « Rien ne nous rend si grand, qu'une grande douleur » reste vrai pour nos souffrances économiques, comme pour les autres puisque dans la formation des crises économiques, il y a des éléments psychologiques, aussi.

Mais il serait assez déconcertant de ne pouvoir appeler que la souffrance pour faire la preuve que l'humanité ne ressemble pas tellement à la collectivité des coéchangistes de Walras. Heureusement, qu'il y a le calcul des probabilités, qui pourrait nous venir en aide et nous délivrer des parchemins de noblesse propres à nous innocenter de l'accusation

de l'égoïsme sans limites, dont un économiste, fut-il de génie, ait pu nous accabler.

Le calcul des probabilités pourrait bien le faire à condition que nous sachions le lui demander. Pour tout dire, l'étude du problème de l'équilibre économique devrait comporter deux parties distinctes: la première analytique, et la seconde du domaine du calcul des probabilités. À l'heure actuelle, nos connaissances concernant ce problème se bornent exclusivement à la partie analytique. Rien n'est fait relativement à la seconde partie et ne le sera pas jusqu'au jour où la fonction utilité totale, ne pourra pas être précisée davantage.

Alors, et seulement alors, quand la fonction utilité totale sera suffisamment bien déterminée, on pourra évaluer d'une part l'ordre de grandeur des différences dûes aux causes matérielles et ensuite, aborder l'étude de la partie *probabilités* du problème. C'est l'étude de la seconde partie du problème qui est seule susceptible de nous informer, qu'il existe ou non des écarts systématiques entre les résultats des calculs et les faits observés infirmant, ou confirmant, ainsi le principe hédonistique.

À présent, tout essai de vérification numérique, par l'observation, de la théorie de l'équilibre économique apparaît donc être inutile et reste voué à l'échec le plus complet.

DE L'UTILITÉ FINALE DE LA MONNAIE VARIABLE AVEC LE TEMPS

15. Jusqu'à maintenant, nous avons constamment admis que l'utilité marginale de la monnaie, était égale à l'unité, c'est-à-dire que cette utilité était indépendante du temps et de toutes les richesses y compris la monnaie.

Les troubles monnétaires bien connus du dernier quart de siècle nous font voir qu'une telle hypothèse n'est pas toujours admissible.

L'instabilité monétaire ayant des répercussions très étendues et extrêmement variées, il est inévitable, non seulement d'abandonner l'hypothèse de l'utilité finale de la monnaie constante, mais bien plus, de se demander si la théorie même trouve encore application.

À cette question préalable, je m'empêcherai de donner une réponse et je me contenterai de « joind e l'incident avec le fond » comme on le dit au Palais de Justice.

J'admet donc, délibèrement que pendant les crises monétaires les coéchangistes continuent à agir comme auparavant. La seule différence qui se produit, est que la fonction utilité totale U, n'a pas la même forme qu'au § 6, mais devient maintenant:

$$U^* = sf(t) + \varphi^*(x_1, x_2, \ldots, x_n; t)$$

La fonction $f(t)$ exprime visiblement l'utilité finale de la monnaie, à l'instant t. Cette utilité dépend donc de la seule variable temps. Je continue donc d'admettre que l'utilité finale de la monnaie, même pendant les époques l'instabilité monétaire, reste indépendante de toute richesse. La fonction f et la fonction φ^* analogue à φ sont supposées développables en série TAYLOR, sauf pour certaines valeurs singulières de t.

Mettons qu'à l'instant t, l'équilibre s'est établi, les prix étant: p_1, $p_2, \ldots p_n$ et les N patrimoines des coéchangistes:

$$P_i(\sigma_i, \alpha_i, \beta_i, \ldots, \lambda_i; t) \qquad (i = 1, 2, \ldots N)\ ^1)$$

Avec les notations habituelles, les équations (6,1) deviennent ici:

$$f(t) = \frac{(\alpha^*)_i}{p_1} = \frac{(\beta^*)^i}{p_2} = \ldots = \frac{(\lambda^*)_i}{p_n}$$

Les (α^*), $(\beta^*)\ldots$ (λ^*) ainsi qu'immédiatement après les $(\alpha^*\alpha^*)$, $(\beta^*\beta^*)$ $\ldots(\lambda^*\lambda^*)$ désignent les mêmes dérivées partielles par rapport à φ^* que respectivement les (α), $(\beta), \ldots, (\lambda)$, $(\alpha\alpha)$, $(\alpha\beta), \ldots, (\alpha\lambda)$ par rapport à φ.

Examinons successivement s'il est possible de réaliser la stabilité de l'équilibre économique au sens de nos deux définitions.

Je commence par rechercher la stabilité d'après la seconde définition § 9. Je forme d'abord les Δp_1, $\Delta p_2 \ldots \Delta p_n$.

On a:

$$\Delta p_1 = \frac{f(t)\,[(\alpha^*\alpha^*)_i(\Delta\alpha_i+\delta\alpha_i)+(\alpha^*\beta^*)_i(\Delta\beta_i+\delta\beta_i)+\ldots+(\alpha^*t)_i\Delta t]-(\alpha^*)_i f'(t)\,\Delta t}{f^2(t)}$$

$$(15,1)\quad \Delta p_2 = \frac{f(t)\,[(\beta^*\alpha^*)_i(\Delta\alpha_i+\delta\alpha_i)+(\beta^*\beta^*)_i(\Delta\beta_i+\delta\beta_i)+\ldots+(\beta^*t)_i\Delta t]-(\beta^*)_i f'(t)\,\Delta t}{f^2(t)}$$

$$\Delta p_n = \frac{f(t)\,[(\lambda^*\alpha^*)_i(\Delta\alpha+\delta\alpha_i)+(\lambda^*\beta^*)_i(\Delta\beta_i+\delta\beta_i)+\ldots+(\lambda^*t)_i\Delta t]-(\lambda^*)_i f'(t)\,\Delta.}{f^2(t)}$$

En tenant compte des équations (7,1) et (9,1) les équations (15,1) donnent

$$f(t)\,(\alpha^*t)_i - (\alpha^*)_i f'(t) = 0$$
$$f(t)\,(\beta^*t)_i - (\beta^*)_i f'(t) = 0$$
$$f(t)\,(\lambda^*t)_i - (\lambda^*)_i f'(t) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots N)$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(\alpha^*)_i}{f(t)}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(\beta^*)_i}{f(t)}\right] = \ldots = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(\lambda^*)_i}{f(t)}\right] = 0.$$

---

[1]) Pour ce que je me propose de montrer, il n'est pas nécessaire de faire usage de la solution du patrimoine moyen.

Par intégration on obtient:

$$\varphi^*(x_1,\ x_2 \ldots\ x_n;\ t) = f(t)\ \psi(x_1,\ x_2 \ldots\ x_n)$$

Or, puisque pour $f(t) \equiv 1$ on a aussi $\varphi^* \equiv \varphi$ on trouve en définitive:

$$\varphi^*(x_1,\ x_2 \ldots\ x_n;\ t) = f(t)\ \varphi(x_1,\ x_2 \ldots\ x_n)$$

Ou, encore

$$U^* = f(t)\ U$$

Je passe maintenant à l'étude de la stabilité au sens de la première définition. Comme au § 7 je considère le cas particulier où il n'y a, en dehors de la monnaie, que deux autres richesses, l'acier et le froment.

Je présente ce cas sous une forme légèrement différente. Ainsi, je suppose que pour l'acier on à:

$$\sum_1^N \Delta\alpha_i = 0$$

tandis que pour le froment:

$$\Delta\beta_1 = \Delta\beta_2 = \ldots = \Delta\beta_N = -c\Delta t$$

En d'autres termes, je présume que pour assurer la stabilité économique les coéchangistes continuent à produire et à consommer pendant la période de variabilité monétaire, tout autant que si la monnaie restait stable.

Dans ces conditions on tire des équations (15,1) et (7,1):

$$(15,2) \qquad f(t)\ (\alpha^* t)_i - (\alpha^*)_i f'(t) = 0$$

et

$$(15,3) \quad f(t)\ [(\beta^*\beta^*)_i\ (\Delta\beta_i + \delta\beta_i) + (\beta^* t)_i\ \Delta t] - (\beta^*)_i f'(t)\ \Delta t = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots\ N)$$

Des équations (15,2) on déduit:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(\alpha)}{f(t)}\right] = 0$$

et des équations (15,3)

$$c\frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{(\beta)}{f(t)}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(\beta)}{f(t)}\right].$$

Par intégration, il résulte en définitive:

$$U^* = f(t)\ [s + f_1(\alpha) + f_2(\beta + ct) - f_1(o) - f_2(ct)]$$

ou encore:

$$U^* = f(t)\ U$$

puisque pour $f(t) \equiv 1$ les fonctions utilités totales $\varphi^* \equiv t\varphi$ doivent être identiques.

Donc, pour qu'il existe stabilité économique, au sens de la première ou de la seconde définition, il faut et — on s'assure aisément — qu'il

suffit aussi, que les coéchangistes consentent à évaluer l'utilité totale de leurs patrimoines suivant la variation de l'utilité finale de leur monnaie. Or, cela est absurde. Qu'ils veuillent le faire, ils ne le peuvent pas, car ils ne connaissent pas les variations de la monnaie, ces variations se produisant à leur insu et en dehors de leurs sphères d'action. Et, plus encore. Pour les richesses provenant de l'extérieur de leur collectivité, ces variations ne sont pas possibles. Ainsi dans l'échange du blé contre des tracteurs automobiles, personne ne consentira à accepter de changement dans l'évaluation de l'utilité, ni le cultivateur pour son blé, ni le fabricant pour ses tracteurs. De telle sorte, qui si le cultivateur se trouve dans le pays dont le change est instable, il devra attribuer au blé destiné à l'étranger une certaine utilité et à celui réservé pour la consommation de l'intérieur une certaine autre utilité. Un tel dédoublement dans les évaluations des utilités est contraire à tout bon sens. Pourtant, ce dédoublement est inévitable, et pour les pays libres-échangistes et pour les pays à économie autarchique. Car malgré leur autarchie, ces derniers pays continuent à faire de l'échange avec l'étranger. Autrement leur monnaie ne serait l'objet d'aucune variabilité.

On arrive ainsi à confirmer analytiquement un autre grand principe, que les économistes ont reconnu depuis longtemps. À savoir, *tant que la monnaie varie il n'y a pas de stabilité économique possible.*

16. Tout comme les équations (6,4) les équations (15,1) permettent d'établir les équations de la dynamique des prix, pour les périodes d'instabilité monétaire. Résolvons à cette fin les équations (15,1) par rapport à

$$(\Delta\alpha_i + \delta\alpha_i),\ (\Delta\beta_i + \delta\beta_i) \ldots\ (\Delta\lambda_i + \delta\lambda_i)$$

On trouve

$$\Delta\alpha_i + \delta\alpha_i = {}_iA^*_{11}\left[f\Delta p_1 - (\alpha^* t)_i\,\Delta t + \frac{f'}{f}(\alpha^*)_i\,\Delta t\right] +$$

$$+ {}_iA^*_{12}\left[f\Delta p_2 - (\beta^* t)_i\Delta t + \frac{f'}{f}(\beta^*)_i\Delta t\right] + \ldots + {}_iA^*_{1n}\left[f\Delta p_n - (\lambda^* t)_i + \frac{f'}{f}(\lambda^*)_i\Delta t\right]$$

$$\Delta\beta_i + \delta\beta_i = {}_iA^*_{21}\left[f\Delta p_1 - (\alpha^* t)_i\,\Delta t + \frac{f'}{f}(\alpha^*)_i\,\Delta t\right] +$$

$$+ {}_iA^*_{22}\left[f\Delta p_2 - (\beta^* t)_i\Delta t + \frac{f'}{f}(\beta^*)_i\Delta t\right] + \ldots + {}_iA^*_{2n}\left[f\Delta p_n - (\lambda^* t)_i + \frac{f'}{f}(\lambda^*)_i\Delta t\right]$$

. . . . . .

$$\Delta\lambda_i + \delta\lambda_i = {}_iA^*_{n1}\left[f\Delta p_1 - (\alpha^* t)_i\,\Delta t + \frac{f'}{f}(\alpha^*)_i\,\Delta t\right] +$$

$$+ {}_i\Delta^*_{22}\left[f\Delta p_2 - (\beta^* t)_i\Delta t + \frac{f'}{f}(\beta^*)_i\Delta t\right] + \ldots + {}_iA^*_{nn}\left[f\Delta p_n - (\lambda^* t)_i + \frac{f'}{f}(\lambda^*)_i\Delta t\right]$$

les A^*_{ik} étant des coefficients qui dépendent de φ^*. En ajoutant termes à termes les équations relatives à $\Delta\alpha_1 + \delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2 + \delta\alpha_2, \ldots \Delta\alpha_N + \delta\alpha_N$ ensuite celles relatives aux $\beta, \ldots, \lambda$ on trouve un système linéaire pour les $\Delta p_1, \Delta p_2 \ldots \Delta p$. Ce système est de la forme:

$$\frac{1}{f}\sum_1^N \Delta\alpha_i + F_1\,\Delta t = B^*_{11}\,\Delta p_1 + B^*_{12}\,\Delta p_2 + \ldots + B^*_{1n}\,\Delta p_n$$

$$\frac{1}{f}\sum_1^N \Delta\beta_i + F_2\,\Delta t = B^*_{21}\,\Delta p_1 + B^*_{22}\,\Delta p_2 + \ldots + B^*_{2n}\,\Delta p_n \qquad (15{,}5)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{f}\sum_1^N \Delta\lambda_i + F_n\,\Delta t = B^*_{n1}\,\Delta p_1 + B^*_{n2}\,\Delta p_2 + \ldots + B^*_{nn}\,\Delta p_n$$

les $F_1, F_2 \ldots F$ étant des fonctions de f et les B^*_{ik} des coefficients déduits des ${}_iA^*_{ik}$.

Le système (15,5) montre d'une manière analogue à ce que nous avons trouvé pour le cas $f \equiv 1$, que les variations des prix dépendent des variations totales des quantités. Mais cette fois-ci, les variations des prix sont influencées, en plus par les variations monétaires.

Les équations (15,5) sont susceptibles aussi de nous donner $f(t)$, en connaisant les $\Delta p_1, \Delta p_2, \ldots, \Delta p_n$. Les équations peuvent donc servir pour déterminer la valeur de la monnaie.

À ce sujet il ne faut pourtant pas nous faire trop d'illusions. Les difficultés que nous avons rencontrées relativement à la vérification expérimentale des théories de l'équilibre restent tout aussi insurmontables, si l'on essaie d'utiliser ces mêmes théories pour mesurer la valeur de la monnaie.

Ces difficultés expliquent d'ailleurs l'insuccès des différentes méthodes qu'on a essayé et auxquelles on a dû renoncer sans que la notion de valeur de la monnaie puisse être éclaircie d'une manière satisfaisante.

La grande inconnue qui domine le problème de la détermination analytique de l'équilibre économique ainsi que celui de la valeur de la monnaie, est la fonction utilité totale. Et cette inconnue ne nous est pas accessible.

La théorie mathématique de l'équilibre économique ne peut réaliser des progrès faute d'une axiomatique ou d'un corps d'axiomes propres à faire disparaître l'indétermination de la fonction utilité totale.

Espérons que le temps, notre maître à tous, nous l'enseignera.

BIBLIOGRAPHIE

1. Denis Henri, Le monopole bilatéral. (Paris, 1943).
2. Divisia F., Économie rationnelle. (Paris, 1928).
3. Evans G., Stabilité et Dynamique de la Production dans l'Économie Politique. Mémorial des Sciences Mathématiques, Fascicule LVI. (Paris, 1932).
4. Fisher Irving, Recherches mathématiques sur la théorie de la valeur et des prix. Traduit de l'anglais par J. Moret. (Paris, 1917. Giard & Brière).
5. Fischer Irving, Le Pouvoir d'Achat de la Monnaie. (Paris, 1926).
6. Perroux François, La valeur. (Paris, 1943).
7. Ricci U., Il metodo in economia politica (Scritti Giuridici, Milano, 1928).
8. Tonnelli A. de Pietri, Traité d'Économie Rationnelle. (Paris, 1927).
9. Zavadsky W., Les mathématiques appliquées à l'économie politique. (Paris 1914).

531.4 MÉCANIQUE RATIONNELLE

LE MOUVEMENT À LA POINSOT GÉNÉRALISÉ

par **I. Cârstoiu**

On généralise le mouvement à la POINSOT, *en étudiant la rotation d'un solide qui a un point fixe et qui est soumis à un système de forces de moment résultant* $\overline{M} = \lambda(\overline{\omega} \times \overline{K})$. *On montre que le mouvement peut-être représenté géométriquement par le roulement de l'ellipsoïde d'inertie sur un plan variable, qui reste constamment tangent à une sphère ayant pour centre le point fixe et de rayon déterminé.*

On étend la théorie au cas où le corps n'est plus entièrement rigide, mais il présente des mouvements internes, qui n'alterent pas la distribution des masses.

1. *Généralités.* Soit un solide qui a un point fixe O et qui est soumis à un système de forces de torseur $(\overline{F}, \overline{M})$.

Le mouvement de ce solide est défini par le mouvement d'un trièdre trirectangle $O\xi\eta\zeta$ invariablement lié au solide, par rapport à un système d'axes absolument fixes rectangulaires $Oxyz$.

Désignons par $\overline{\omega}$ le vecteur rotation instantanée du solide. La vitesse absolue d'un point M du solide est donnée par le produit vectoriel

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r} \tag{1}$$

avec $\overline{r} = \overrightarrow{OM}$.

En désignant par (p, q, r) les composantes de $\overline{\omega}$ et par (ξ, η, ζ) celles de $\overline{r}$ suivant les axes $O\xi\eta\zeta$, on a pour les composantes de la vitesse $\overline{v}$

$$\begin{cases} v_\xi = q\zeta - r\eta \\ \dots\dots\dots \end{cases} \tag{1'}$$

Nous prenons pour axes $O\xi\eta\zeta$ les axes principaux d'inertie du solide relatifs au point O.

L'ellipsoïde d'inertie correspondant a alors l'équation

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\xi^2 = 1 \tag{2}$$

A, B, C étant les moments principaux d'inertie.

L'énergie cinétique E a pour expression

$$2E = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 \tag{3}$$

et le moment cinétique $\overline{K}$ de composantes (Ap, Bq, Cr) suivant les axes $O\xi\eta\zeta$ a une grandeur K définie par

$$K^2 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2. \tag{4}$$

Enfin, en appliquant le théorème du moment cinétique

$$\frac{d\overline{K}}{dt} = \overline{M} \tag{5}$$

on obtient les équations d'Euler

$$\left\{ \begin{array}{l} A\dot{p} + (C-B)\, qr = L \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right. \tag{6}$$

2. *Mouvement à la* Poinsot. C'est celui où le solide n'est soumis à aucune force, ou bien est soumis à des forces extérieures dont la résultante passe par le point O. Dans ce cas $\overline{M} = O$ et on a les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} A\dot{p} + (C-B)\, qr = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right. \tag{7}$$

qui admettent deux intégrales premières

$$E = h = \text{const.} \quad \text{et} \quad K = \text{const.} \tag{8}$$

D'ailleurs d'après l'équation (5), $\overline{K}$ est un vecteur constant non seulement en grandeur, mais aussi en direction (absolument fixe).

Le mouvement du solide est alors représenté géométriquement (Poinsot) par le roulement de l'ellipsoïde d'inertie sur un plan fixe (perpendiculaire à $\overline{K}$), qu'il touche à chaque instant au point où le vecteur $\overline{\omega}$ perce l'ellipsoïde.

3. *Le mouvement à la* Poinsot *généralisé.* Nous voulons étudier *le cas ou le moment* $\overline{M} \neq o$, *est perpendiculaire à chaque instant, aux vecteurs* $\overline{\omega}$ *et* $\overline{K}$. Ce mouvement, comme nous allons le montrer, apparaît comme généralisant le mouvement à la Poinsot.

On peut écrire

$$\overline{M} = \lambda\, (\overline{\omega} \times \overline{K}) \tag{9}$$

λ étant une constante ou plus généralement, une fonction arbitraire du temps t, mais qui doit être considérée comme donnée.

L'équation (5) devient

$$\frac{d\overline{K}}{dt} = \frac{\partial \overline{K}}{\partial t} + \overline{\omega} \times \overline{K} = \lambda\,(\overline{\omega} \times \overline{K})$$

ou encore

$$\frac{\partial \overline{K}}{\partial t} = (\lambda - 1)\,(\overline{\omega} \times \overline{K})$$

qui projetée sur les axes $O\xi\eta\zeta$ donne

$$(10) \qquad \begin{cases} A\dot{p} = (\lambda - 1)\,[(C - B)\,qr] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}.$$

Le système (10) permet de déterminer p, q, r, avec λ donné. Une fois connus p, q, r on aura le moment $\overline{M}$ avec l'équation (9).

On voit que le mouvement que nous étudions est défini par un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} \dot{p} = \alpha qr \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

où α, β, γ sont des fonctions du temps t, liées par la relation

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$$

Il généralise le mouvement à la Poinsot régi par les équations (7).

Pour $\lambda \equiv 0$ on retrouve ce mouvement.

La valeur $\lambda \equiv 1$ correspond au cas banal, où le solide est fixe. Nous écarterons ce cas.

Enfin, pour $\lambda \equiv 2$ on obtient le système

$$\begin{cases} A\dot{p} + (B - C)\,qr = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

qui, à un signe près de la paranthèse, coïncide avec (7).

Reprenons les équations (10). Il est facile à vérifier que ce système admet deux intégrales premières identiques à (8).

En effet, multiplions la première équation (10) par p, la deuxième par q et la troisième par r et ajoutons-les; il vient

$$Ap\dot{p} + Bq\dot{q} + Cr\dot{r} = 0.$$

De même, en multipliant ces équations respectivement par Ap, Bq, Cr et en ajoutant, on obtient

$$A^2\,p\dot{p} + B^2\,q\dot{q} + C^2\,r\dot{r} = 0$$

D'où, par intégration, les deux intégrales premières

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h = const.$$

$$A^2\,p^2 + B^2\,q^2 + C^2\,r^2 = K^2 = const.$$

La première intégrale se déduit aussi du théorème de l'énergie. En effet, on a

$$dE = \Sigma \bar{F} d\bar{r} = \Sigma \bar{F} \bar{v}\, dt = \Sigma \bar{F} (\bar{\omega} \times \bar{r})\, dt = \bar{\omega} \bar{M}\, dt = 0.$$

De même, la constance de la grandeur du vecteur $\bar{K}$ résulte immédiatement de l'équation (5). En effet, en multipliant scalairement cette équation par $\bar{K}$, il vient

$$\bar{K} \frac{d\bar{K}}{dt} = \bar{M} \bar{K} = 0$$

donc $K^2 = const.$

Remarquons que *le vecteur $\bar{K}$ n'est plus constant en direction, comme il était dans le mouvement à la* Poinsot. *Son extrémité décrit une courbe sphérique.*

Voyons de plus près comment se présente le mouvement.

Considérons l'ellipsoïde d'inertie. Le vecteur $\bar{\omega}$ perce cet ellipsoïde en un point P dont les coordonnées (ξ_1, η_1, ζ_1) vérifient les équations

$$\frac{\xi_1}{p} = \frac{\eta_1}{q} = \frac{\zeta_1}{r} = \frac{\rho}{\omega} \qquad (\rho = OP)$$

avec

$$A\xi_1^2 + B\eta_1^2 + C\zeta_1^2 = 1.$$

On tire

$$(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) \frac{\rho^2}{\omega^2} = 1$$

d'où

$$\frac{\rho}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2h}}. \tag{11}$$

On a donc

$$p = \xi_1 \sqrt{2h}\ ,\ q = \ldots \tag{12}$$

et en portant ces valeurs dans la deuxième intégrale, il vient

$$A^2 \xi_1^2 + B^2 \eta_1^2 + C^2 \zeta_1^2 = \frac{K^2}{2h}.$$

Alors, la *polhodie* (lieu du point P) sera définie comme l'intersection des ellipsoïdes

$$\begin{cases} A\,\xi^2 + B\,\eta^2 + C\,\zeta^2 = 1 \\ A^2\xi^2 + B^2\eta^2 + C^2\zeta^2 = \dfrac{K^2}{2h}. \end{cases} \tag{13}$$

Le plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie au point P a pour équation

$$Ap\xi + Bq\eta + Cr\zeta = \sqrt{2h}.$$

Ce plan, comme dans le mouvement à la Poinsot, *est normal à la direction du moment cinétique; mais comme ce moment n'a plus une direction fixe, le plan lui-même, n'est plus fixe.*

La distance du point O à ce plan est

$$(14) \qquad \delta = \frac{1}{\sqrt{(A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2)\,\frac{\rho^2}{\omega^2}}} = \frac{\sqrt{2h}}{K} = const.$$

On obtient ainsi la représentation suivante du mouvement:

L'ellipsoide d'inertie roule sans glisser sur un plan, tandis que ce plan, variable, reste constamment tangent à la sphère de centre O et de rayon $\frac{\sqrt{2k}}{K}$.

Une autre conséquence des équations précédentes est que *la projection de la rotation instantannée sur la direction (variable) du moment cinétique est constante.* En effet

$$\bar{\omega}\,\bar{K} = \omega K \cos(\bar{\omega},\ \bar{K}) = pAp + qBq + rCr = 2h$$

d'où

$$(15) \qquad \omega \cos(\bar{\omega},\ \bar{K}) = \frac{2h}{K}$$

quantité constante. Ceci montre la validité pour ce mouvement du théorème suivant de Poinsot [1]): *La projection du vecteur* $\bar{\omega}$ *sur la direction (fixe) du vecteur* $\bar{K}$ *est constante.*

Remarquons en passant, que l'angle des vecteurs $\bar{\omega}$ et $\bar{K}$ n'est jamais droit.

En comparant les formules (14) et (15) il résulte

$$(16) \qquad \omega \cos(\bar{\omega},\ \bar{K}) = \delta\sqrt{2h}.$$

La perpendiculaire abaissée de l'extrémité du vecteur $\bar{\omega}$ *sur* $\bar{K}$ *est donc située d'un côté ou de l'autre du plan tangent (et évidemment parallèle à celui-ci) suivant que* $h \gtrless \frac{1}{2}$. *Dans le cas ou* $h = \frac{1}{2}$, *cette perpendiculaire est contenue dans le plan tangent même. Alors* $\bar{\omega} = \overline{OP}$ *et l'extrémité de* $\bar{\omega}$ *décrit la polhodie.* Ce que l'on vérifie immédiatement avec les formules (11) et (12).

---

[1]) Voir par ex. Paul Appell, Traité de Mécanique Rationnelle, 4-ème édition, 1931, tome II, pp. 163—164.

3. *Cas de mouvement internes* [1]). Nous allons étudier maintenant le problème plus général des mouvements internes, avec invariabilité géométrique des masses. On aura donc les mêmes axes, les mêmes moments d'inertie.

Calculons le moment $\overline{K}$

$$\overline{K} = \Sigma m \overline{r} \times \overline{v}_a$$

$\overline{v}_a$ étant la vitesse absolue d'un point M quelconque du système.

Désignons par $\overline{v}_e$ la vitesse d'entraînement et par $\overline{v}_r$ la vitesse relative de M. On a

$$\overline{v}_a = \overline{\omega} \times \overline{r} + \frac{\partial \overline{r}}{\partial t} = \overline{v}_e + \overline{v}_r \tag{17}$$

$$\overline{K} = \Sigma m \overline{r} \times \overline{v}_e + \Sigma m \overline{r} \times \overline{v}_r = \overline{K}_e + \overline{K}_r . \tag{18}$$

Ce moment cinétique se compose donc de deux termes, l'un le moment d'entraînement $\overline{K}_e$ dû à la vitesse de rotation $\overline{\omega}$ et l'autre le moment relatif $\overline{K}_r$ dû aux vitesses relatives $\overline{v}_r$.

Désignons par (K_1, K_2, K_3) les composantes de $\overline{K}_r$ dans le système mobile. On aura

$$\overline{K} = \overline{i}\,(Ap + K_1) + \overline{j}\,(Bq + K_2) + \overline{k}\,(Cr + K_3) \tag{19}$$

$\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ étant les verseurs des axes $O\xi\eta\zeta$.

En portant cette expression dans l'équation (5), on obtient les équations d'Euler généralisées

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)\, qr + K_3 q - K_2 r + \dot{K}_1 = L \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{20}$$

Si l'on suppose maintenant que le moment $\overline{M}$ soit perpendiculaire aux vecteurs $\overline{\omega}$ et $\overline{K}$, on obtient une intégrale première

$$(Ap + K_1)^2 + (Bq + K_2)^2 + (Cr + K_3)^2 = K^2 = const. \tag{21}$$

qui exprime *la constance de la grandeur du moment cinétique total* [2]).

En général, le système n'admet pas d'autre intégrale et on ne peut donc obtenir l'intégration par quadratures.

---

[1]) Voir Paul Appell, loc. cit., tome IV, fasc. II, 1937, p. 48 et V. Volterra, Conférences sur quelques questions de Mécanique et de Physique Mathématique, Collection de Physique Mathématique, fasc. IV, Paris, Gauthier-Villars, 1938. Ces deux géomètres étudient *les mouvements internes dans le cas où le moment* $\overline{M} = 0$.

[2]) On remarque que pour obtenir cette intégrale, il suffit de supposer que le moment $\overline{M}$ soit perpendiculaire seulement à $\overline{K}$.

5. *Mouvements internes permanents.* Les mouvements internes sont dits permanents si le moment $\overline{K}_r$ est un vecteur fixe par rapport au solide.

Dans ce cas les équations du mouvement (20) deviennent

$$(22)\quad \begin{cases} A\dot{p} + (C - B)\, qr + K_3 q - K_2 r = L \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

En supposant toujours que le moment $\overline{M}$ soit perpendiculaire aux vecteurs $\overline{\omega}$ et $\overline{K}$, les équations (22) peuvent s'écrire

$$(23)\quad \begin{cases} A\dot{p} + (1 - \lambda)\, (C - B)\, qr + K_3 q - K_2 r = O \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Ces équations admettent deux intégrales premières

$$(24)\quad \begin{cases} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h = const. \\ (Ap + K_1)^2 + (Bq + K_2)^2 + (Cr + K_3)^2 = K^2 = const. \end{cases}$$

La première exprime que *l'énergie cinétique d'entraînement du solide est constante* [1]; la deuxième, que *la grandeur du moment cinétique total est constante.* Cette dernière peut-être remplacée par

$$(25)\quad A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 + 2\, Ap\, K_1 + 2\, Bq\, K_2 + 2\, Cr\, K_3 = const.$$

Cherchons une interprétation géométrique du mouvement.

Soit toujours P le point où $\overline{\omega}$ perce l'ellipsoïde d'inertie. Ses coordonnées vérifient encore les équations

$$\frac{\xi_1}{p} = \frac{\eta_1}{q} = \frac{\zeta_1}{r} = \frac{\rho}{\omega} \qquad (\rho = OP)$$

$$A\xi_1^2 + B\eta_1^2 + C\zeta_1^2 = 1$$

d'où

$$\frac{\rho}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2h}}$$

On a donc

$$p = \xi_1 \sqrt{2h},\ q = \ldots$$

et en portant ces valeurs dans l'intégrale qui exprime la constance de la grandeur du moment cinétique total, il vient

$$A^2\left(\xi_1 + \frac{K_1}{A\sqrt{2h}}\right)^2 + B^2\left(\eta_1 + \frac{K_2}{B\sqrt{2h}}\right)^2 + C^2\left(\zeta_1 + \frac{K_3}{C\sqrt{2h}}\right)^2 = \frac{K^2}{2h}.$$

[1]) L'énergie cinétique totale E n'est pas constante et l'on a

$$dE = \overline{\omega}\,\overline{M}\, dt + \Sigma\, \overline{F}_i\, d\overline{r}_i = \Sigma\, \overline{F}_i\, d\overline{r}_i$$

$\overline{F}_i$ étant les forces intérieures, correspondant aux mouvements internes. *La variation de E représente donc le travail des forces intérieures.*

Le lieu du point P sur l'ellipsoïde d'inertie (polhodie) est alors défini comme l'intersection des deux ellipsoïdes

$$(26)\quad \begin{cases} A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1 \\ A^2\left(\xi + \dfrac{K_1}{A\sqrt{2h}}\right)^2 + B^2\left(\eta + \dfrac{K_2}{B\sqrt{2h}}\right)^2 + C^2\left(\zeta + \dfrac{K_3}{C\sqrt{2h}}\right)^2 = \dfrac{K^2}{2h}. \end{cases}$$

Le plan tangent (π) à l'ellipsoïde d'inertie au point P a l'équation

$$Ap\xi + Bq\eta + Cr\zeta = \sqrt{2h}.$$

Ce plan n'est pas fixe. Il est, à chaque instant, perpendiculaire au vecteur $\overline{K}_e$. La distance OD du point O à ce plan est

$$OD = \frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2}}$$

quantité qui n'est plus, en général, constante. Le mouvement ne se laisse pas être représenté géométriquement d'une façon simple.

Remarquons que l'extrémité L du vecteur $\overline{K}_e$ et le point D sont alignés avec O et la relation précédente s'écrit

$$(27)\qquad OD \cdot OL = \sqrt{2h}$$

qui prouve que *le plan* (π) *est le plan polaire du point* L *par rapport à la sphère de centre* O *et de rayon* $\sqrt{2h}$.

Supposons que $AK_1 p + BK_2 q + CK_3 r$ est une constante, c'est-à-dire que *la polhodie est une conique, dont le plan est normal au vecteur* (AK_1, BK_2, CK_3) *fixe dans le solide.*

Alors, la deuxième intégrale (25) devient

$$(28)\qquad A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = K_e^2 = const.$$

Dans ce cas, la distance OD est

$$(29)\qquad OD = \frac{\sqrt{2h}}{K_e} = const.$$

Le plan (π) *reste donc constamment tangent à la sphère fixe de centre* O *et de rayon* $\dfrac{\sqrt{2h}}{K_e}$.

Remarquons aussi, que pour un tel mouvement, on a

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = (A^2 \xi_1^2 + B^2 \eta_1^2 + C^2 \zeta_1^2) \times 2h = K_e^2$$

et la polhodie est commune aux trois ellipsoïdes:

$$(30) \qquad \begin{cases} A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1 \\ A^2 \left(\xi + \dfrac{K_1}{A\sqrt{2h}} \right)^2 + \ldots = \dfrac{K^2}{2h} \\ A^2 \xi^2 + B^2 \eta^2 + C^2 \zeta^2 = \dfrac{K_e^2}{2h} \end{cases}$$

Elle est par suite, une polhodie de Poinsot, *réduite à une conique.*

Dans les mêmes conditions, *la projection de* $\bar{\omega}$ *sur* $\bar{K}_e$ *est égale à*

$$(31) \qquad \omega \cos(\bar{\omega}, \bar{K}_e) = \frac{2h}{K_e} = OD \cdot \sqrt{2h} = const.$$

La projection de $\bar{\omega}$ sur $\bar{K}$ n'est pas constante. Elle le serait avec d'autres conditions: il faudrait que la polhodie se réduise à une conique, dont le plan soit perpendiculaire au vecteur $\bar{K}_r$.

Dans ce cas, l'énergie cinétique totale du système serait aussi constante [1]). Nous ne pouvons pas insister davantage sur ces questions, sans dépasser l'objet de cette Note. Nous renvoyons au livre cité de V. Volterra, dont les méthodes syntétiques nous ont, tout particulierement, influencé.

---

[1]) On vérifie facilement, en partant de la formule (17), que cette énergie est donnée par

$$E = E_e + E_r + \bar{\omega}\, \bar{K}_r$$

E_e et E_r étant l'énergie d'entraînement, respectivement l'énergie relative du système.

532.5 MECANIQUE DES FLUIDES

QUELLE BEZW. SENKE IM KREISROHR

von **D. T. Dumitrescu**

Es wurde die numerische Auswertung des Geschwindigkeitspotentials und der Stromfunktion einer Quelle bezw. Senke nach LAMB *in einem Kreiskanal, gegeben.*

In der Nähe des Nullpunktes wurde eine Näherung durch Kugelfunktionen, wegen der schlechten Konvergenz der unendlichen Reihen, verwendet.

Eine Anwendung des Quell-bezw. Senkpotentials ist, wie RANKINE zum ersten Mal gezeigt hat, die Berechnung der Strömung um den Rotationskörper.

Durch die verschiedensten Annahmen über die Verteilung der Quellen und Senken auf der Symetrieachse des Körpers (nur Strömungen um die achsensymetrischen Körper können mit dieser Methode behandelt werden) lässt sich eine grosse Mannigfaltigkeit vom umströmten Körpern bilden.

Die Strömung um die Rotationskörper in einem Kreiskanal lässt sich durch eine Belegung der Symetrieachse mit Quellen bezw. Senken erzeugen, deren Potential- und Stromfunktionen gegeben sind durch [1]:

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi R^2}\left\{ -x + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{I_0(\beta_i r)}{\beta_i I_0^2(\beta_i R)} e^{-\beta_i x} \right\} \quad [x > 0]$$

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi R^2}\left\{ x + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{I_0(\beta_i r)}{\beta_i I_0^2(\beta_i R)} e^{+\beta_i x} \right\} \quad [x < 0] \qquad (1)$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi R^2}\left\{ -\frac{1}{2} r^2 + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{r I_0'(\beta_i r)}{\beta_i I_0^2(\beta_i R)} e^{-\beta_i x} \right\} \quad [x > 0]$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi R^2}\left\{ \frac{1}{2} r^2 - R^2 - \sum_{i=1}^{i=n} \frac{r I_0'(\beta_i r)}{\beta_i I_0^2(\beta_i R)} e^{+\beta_i x} \right\} \quad [x < 0) \qquad (2)$$

[1] LAMB, R. & M. 1010, Ianuar 1926.

wobei (R) der Radius, (x) die Symetrieachse des Kanals und (Q) die Ergiebigkeit der Quelle bezw. Senke bedeutet.

$I_0(\beta r)$ ist die BESSELSCHE Funktion erster Art und Ordnung Null.

Die Summe Σ erstreckt sich über die Werte von β_i welche die Gleichung:

$$I_0'(\beta_i R) = -I_1(\beta_i R) = 0$$

befriedigen, dass heisst über die Nullstellen der BESSELSCHEN Funktionen erster Art und erster Ordnung ($I_1(\beta_i R)$:

$$\beta_1 R = 3{,}8317,\ \beta_2 R = 7{,}0156,\ \beta_3 R = 10{,}1735,\ \text{etc.}$$

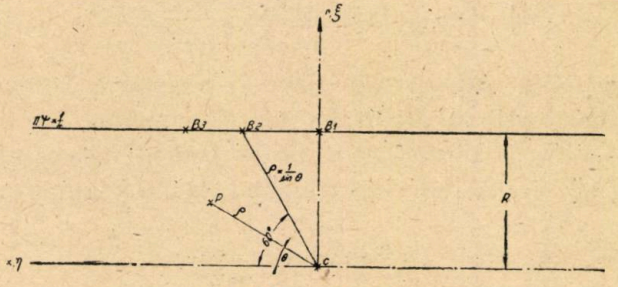


Abbildung Nr. 1.

Die Formeln (1) und (2) sind, wie man durch die bekannten Eigenschaften der BESSELSCHEN Funktionen feststellen kann, Lösungen der Gleichungen:

$$\Delta\Phi = 0 \text{ und } \Delta\psi = 0.$$

Die Randbedingung, dass die Rohrwand eine Stromlinie sein soll, ist durch:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 0 \qquad \textit{für } r = R \textit{ erfüllt.}$$

Ausserdem, für $x = 0$ (die infinitesimalen Werte von x ausgeschlossen) ist:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0 \text{ weil } \int_0^R \left(-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{x=0} 2\pi r dr = \pm\frac{1}{2}Q \qquad \text{für } x \gtrless 0.$$

Die Komponenten (u) und (v) der Geschwindigkeit sind durch die Formeln:

$$u = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} \quad \text{und} \quad v = -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (3)$$

gegeben.

Das Glied $-R^2$ in dem zweiten Ausdruck für ψ (2) ist aus Stetigkeitsgründen eingeführt ($r = R$). Die beiden Ausdrücke stimmen für $x = 0$ überein (wie man leicht durch die Sätze der BESSELSCHEN Funktionen nachweisen kann).

Die Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion, dimensionslos geschrieben, für $Q = 1$, lauten folgendermassen $\left(\frac{\gamma}{R} = \xi \ , \ \frac{x}{R} = \eta\right)$:

$$\pi\Phi = -\eta + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{I_0(\beta_i \xi)}{\beta_i I_0^2(\beta_i)} e^{-\beta_i \eta}$$

für $\eta > 0$ (4)

$$\pi\psi = -\frac{1}{2}\xi^2 + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\xi \cdot I_0'(\beta_i \xi)}{\beta_i I_0^2(\beta_i)} e^{-\beta_i \eta}.$$

Die numerische Auswertung dieser Funktionen, bereitet insofern Schwierigkeiten, weil in der Nähe des Nullpunktes, die unendlichen Reihen sehr schlecht konvergieren. In der ersten Näherung können wir für $\pi\Phi$ und $\pi\psi$, in der Nähe des Nullpunktes die folgenden Ausdrücke:

$$\pi\Phi = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

für $\xi^2 + \eta^2 \ll 1$ (5)

$$\pi\psi = \frac{1}{4}\left\{1 - \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}\right\}$$

anwenden.

ENTWICKLUNG VOM NULLPUNKT AUS NACH KUGELFUNKTIONEN

Für etwa grössere Werte von ξ und η bekommen wir eine bessere Näherung, wenn wir die Potentialgeschwindigkeit und Stromfunktion, vom Nullpunkt aus nach Kugelfunktionen entwickeln.

Die Potentialgeschwindigkeit und Stromfunktionen der Quelle ($Q = 1$) allein im Raume sind durch:

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\rho} \qquad \psi = \frac{1}{4\pi}(1 - \cos\theta)$$

gegeben (Siehe Abbildung Nr. 1).

Wenn wir für das Geschwindigkeitspotential der Quelle den Ansatz:

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\rho} + A_2 \rho^2 P_2(\cos\theta) + A_4 \rho^4 P_4(\cos\theta) + \ldots$$

machen, so folgt für die Stromfunktion folgender Ausdruck:

$$\psi = \frac{1}{4\pi}(1 - \cos\theta) + A_2 \frac{\rho_2}{3} \sin^2\theta \, P_2'(\cos\theta) + A_4 \frac{\rho^5}{5} \sin^2\theta \, P_4'(\cos\theta) + \ldots$$

mit $P_2' = \dfrac{dP_2(\cos\theta)}{d(\cos\theta)}$ (Kugelfunktionen angegeben bei JAHMKE EMDE. 2. Auflage 1933, Seite 174).

Zur Bestimmung der unbekannten Koefizienten A_{2n} (die A_{2n+1} verschwinden aus Gründen der Symetrie) verlangt man, dass der Punkt $B_1(\xi = 1, \eta = 0)$ Staupunkt seien soll und dass die Stromlinie $\psi = \dfrac{1}{4\pi}$ noch durch einige weitere Punkte der Geraden $\xi = 1$ hindurch geht.

1. *Näherung.* Für den Staupunkt B_1 $(\xi = 1,\ \eta = 0)$ soll

$u = 0$ aus Symetriegründen und

$$v = \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{-\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{\rho} + A_2\rho^2\,P_2(\cos\theta)\right\} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\sin\theta}{\rho^2} - A_2\,\rho\sin\theta = 0$$

seien.

Aus dieser Gleichung ergiebt sich $A_2 = \dfrac{1}{4\pi}$ und infolgedessen erhalten wir für Φ und ψ die nachstehenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{1}{4\pi\rho}\left\{1 - \rho^3\,P_2(\cos\theta)\right\} \\ \psi &= \frac{1}{4\pi}\left\{1 - \cos\theta + \frac{\rho^3}{3}\sin^2\theta\,P_2'(\cos\theta)\right\}. \end{aligned} \tag{6}$$

2. *Näherung.* Die zweite Näherung wird dadurch erreicht, dass: *a)* $B_1(\xi = 1,\ \eta = 0)$ ein Staupunkt und *b)* $\psi = \dfrac{1}{4\pi}$ für $\rho = \dfrac{1}{\sin 60}$. Die Stromlinie $\psi = \dfrac{1}{4\pi}$ geht durch den Punkt $B_2\left(\rho = \dfrac{1}{\sin\theta},\ \theta = 60^0 \text{ durch}\right)$ seien soll.

Die entsprechenden Gleichungen sind:

$$A_2 - \frac{3}{2}\,A_2 = \frac{1}{4\pi}$$

$$A_2 - \frac{5}{6}\,A_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{4\pi}.$$

Aus diesen lassen sich die Koefizienten A_2 und A_4 bestimmen:

$$A_2 = \frac{0{,}699}{4\pi}$$

$$A_4 = -\frac{0{,}201}{4\pi}.$$

In diesem Falle gestalten sich Φ und ψ wie folgt:

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi\rho}\left\{1 - 0{,}699\,\rho^3\,P_2(\cos\theta) + 0{,}201\,\rho^5\,P_4(\cos\theta)\right\} \qquad (7)$$

$$\psi = \frac{1}{4\pi}\left\{1 - \cos\theta + 0{,}233\rho^3\sin^2\theta P_2'(\cos\theta) - 0{,}0402\rho^5\sin^2\theta P_4'(\cos\theta)\right\}.$$

In ähnlicher Weise kann man eine dritte Näherung erhalten wenn man etwa verlangt, dass ausser den Bedingungen (1) und (2) noch $\psi = \frac{1}{4\pi}$ im Punkte B_3 ($\xi = 1$, $\eta = 1$) ist; höhere Näherungen erhält man wenn man noch mehrere Punkte auf eine grössere Strecke verteilt.

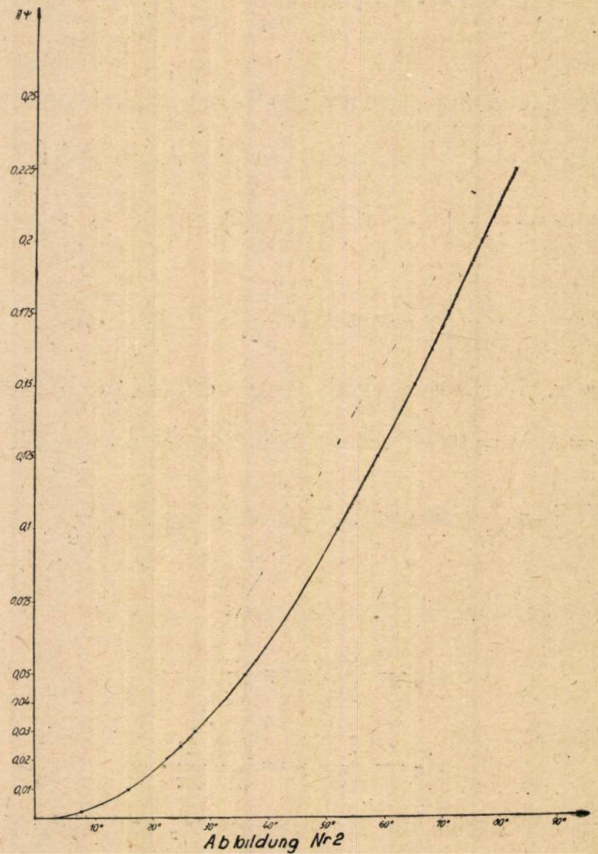


Abbildung Nr 2

Es ist nicht bewiesen, auch nicht einmal wahrscheinlich, dass die Fortsetzung des Verfahrens bei beliebig dichter Lage der Kontrollpunkte auf einer entsprechend grossen Strecke des Zylinders gegen die genauen Entwicklungskoefizienten der Strömung der Quelle im

Kanal konvergiert, wahrscheinlich hat man es mit einer Art Semikonvergenz zu tun, deren Güte sich beurteilen lässt, wenn man die Ersatzströmungen zeichnet und den Anschluss an die Reihe vom LAMB in einem Gebiet prüft, in dem beide Entwicklungen noch brauchbar sind.

Ganz in der Nähe des Nullpunktes ist die Stromfunktion durch die Formel:

$$\psi = \frac{1}{4\pi}\left\{1 - \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}\right\} = \frac{1}{4\pi}(1 - \cos\theta)$$

angegeben, und ist als eine durch Null gehende Gerade zu betrachten. Die entsprechenden Werte des Winkels θ der zwischen der Symetrieachse des Kanals und der Stromfunktion $\pi\psi = \text{Konst.}$ entsteht, sind in der Zahlentafel Nr. 1 angegeben. Diese Werte sind in der Abbildung Nr. 2 aufgetragen.

Für die numerische Auswertung der unendlichen Reihen der Stromfunktion und des Geschwindigkeitspotentials wurde für $\xi < 0{,}3$, $\eta < 0{,}3$ die Formel (7) verwendet. Für $\xi > 0{,}3$, $\eta > 0{,}3$ wurden die ersten fünfzig Glieder der unendlichen Reihen (4) genommen.

Abhängig von ξ und η sind die Werte vom Geschwindigkeitspotential $\pi\Phi$ in Zahlentafel Nr. 2 und von der Stromfunktion $\pi\psi$ in Zahlentafel Nr. 3 angegeben.

Die Geschwindigkeitspotential- und Stromfunktionkurven sind in Abbildung Nr. 3 aufgetragen.

ZAHLENTAFEL Nr. 1

Die Stromfunktion $\pi\psi$ abhängig vom dem Winkel θ in der Nähe des Nullpunktes

θ	$\pi\psi$	θ	$\pi\psi$
8° 6′	0,0025	36°52′	0,0505
11°28′	0,0051	45°26′	0,0750
14° 4′	0,0075	53°52′	0,1002
16°15′	0,0102	59°00′	0,1251
23° 4′	0,0203	66°35′	0,1504
25°50′	0,0251	72°28′	0,1750
28°21′	0,0302	78°33′	0,2001
32°51′	0,0408	84°45′	0,2250

ZAHLENTAFEL Nr. 2

Das Geschwindigkeitspotential $\pi\Phi$ abhängig von ξ und η

η/ξ	0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0,1	—1,94403	—1,20226	—0,46676	—0,06679	+ 0,10899	+ 0,13428	+ 0,19680
0,2	—0,69387	—0,56140	—0,32750	—0,01121	+ 0,12987	+ 0,19180	+ 0,21114
0,4	—0,04034	—0,02252	+ 0,02210	+ 0,12841	+ 0,20614	+ 0,24619	+ 0,25833
0,6	+ 0,20550	+ 0,21039	+ 0,22376	+ 0,26306	+ 0,29957	+ 0,32215	+ 0,32937
0,8	+ 0,35937	+ 0,36115	+ 0,36614	+ 0,38212	+ 0,39895	+ 0,41044	+ 0,41428
1,00	+ 0,48185	+ 0,48257	+ 0,48464	+ 0,49154	+ 0,49929	+ 0,50482	+ 0,50681
1,5	+ 0,74791	+ 0,74751	+ 0,74779	+ 0,74876	+ 0,74994	+ 0,75072	+ 0,75102

ZAHLENTAFEL Nr. 3

Die Stromfunktion $\pi\psi$ abhängig von ξ und η

η/ξ	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9
0,3	0,01280	0,04418	0,10960	0,16060	0,20450	0,22530
0,5	0,00578	0,02160	0,06994	0,12570	0,18430	0,21500
0,7	0,00372	0,01462	0,05310	0,10720	0,17240	0,20880
1	0,00284	0,01130	0,04402	0,09560	0,16420	0,20404
1,5	0,00250	0,01010	0,04050	0,09083	0,16060	0,20230
2	0,00250	0,01000	0,04000	0,09080	0,16060	0,20230

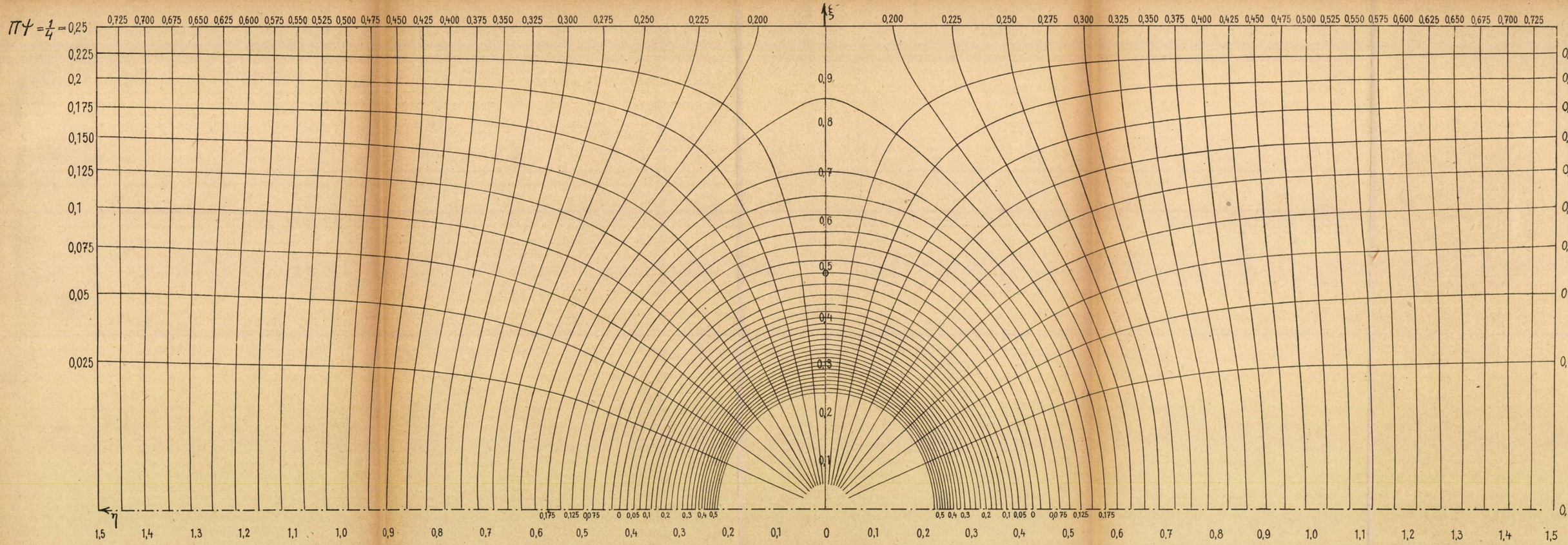


Abbildung Nr. 3.
Die Geschwindigkeit-potential-Stromfunktionkurven

532.5 MÉCANIQUE DES FLUIDES

SUR L'ÉCOULEMENT D'UN GAZ SOUS GRANDE PRESSION ET AVEC GRANDE VITESSE

par **I. Linteş**

La « Balistique Intérieure » *suppose la veine des gaz, dans l'âme d'une bouche à feu, réduite à la trajectoire d'un point qui suit l'axe de l'âme.*

La détente des gaz est également supposée normale, sans turbulences. C'est ainsi qu'ont a établi les trois équations différentielles fondamentales qui régissent le mouvement; soit: l'équation de la combustion, l'équation des inerties et l'équation de l'équivalence des énergies (RÉSAL).

Mais la veine des gaz peut très bien être comparée avec un ressort, ou une tige comprimée, qui, par sa détente, pousse le projectile; or, comme le mouvement de la tige est très rapide, il en résulte des vibrations.

Le présent mémoire s'occupe spécialement avec l'étude des influences des vibrations, en établissant une équation différentielle qui changera bien, par son intégration, l'aspect, et peut-être même le fondement du problème de la « Balistique Intérieure ».

Par la suite, le présent mémoire cherche également a formuler une explication de la « turbulence » *dans le mouvement d'un fluide.*

Les équations théoriques du mouvement d'un projectile dans la *Balistique Intérieure*, c'est-à-dire pendant la traversée de l'âme d'une bouche à feu, sont:

— L'équation d'inertie:

$$m \cdot \frac{dV}{dt} = \sigma . P. \tag{1}$$

— L'équation de combustion:

$$\frac{dz}{dz} = A . \varphi (z) . \psi (P) \tag{2}$$

— L'équation d'équivalence:

$$\tau = \frac{f . \bar{\omega} . z}{n - 1} - \frac{P . (c - \eta_z . \bar{\omega})}{n - 1} \tag{3}$$

sachant que: m signifie la masse du projectile, V sa vitesse au moment t, σ la section utile ($\sigma = 0{,}805 . a^2$), a le calibre, P la pression des gaz, z le rapport entre la fraction de poudre brûlée au moment t, à la charge totale $\bar{\omega}$ de poudre, $\bar{\sigma}$ le travail mécanique, c la capacité de l'âme, n le rapport des chaleurs spécifiques et A, f et η_z deux constantes balistiques, ainsi que $\varphi(z)$ et $\psi(P)$ deux fonctions balistiques.

On suppose également, à la fin de la combustion que:

$$P . (c - \eta_z . \bar{\omega})^n = \text{const.}$$

Mais ces trois équations supposent la veine des gaz comme une tige qui pousse le projectile et néglige complètement son élasticité. Alors on est tenté d'admettre que cette tige étant élastique, peut fort bien vibrer comme une barre métallique quelconque et dont l'équation est:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4}$$

ainsi que dans l'étude des vibrations, x est l'abscisse d'une section au moment t, u l'élongation et $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ la célérité, E étant le modul d'élasticité et ρ la masse spécifique.

Dans le cas d'une veine des gaz, l'équation des vibrations devient plus compliquée encore, car E et surtout ρ ne sont plus des constantes, comme dans le cas d'une tige.

En effet, dans le cas d'une détente adiabatique on a:

$$\rho = \rho_m \cdot \left(\frac{P}{P_m}\right)^{\frac{1}{n}} . \tag{5}$$

P_m étant la pression maximum de gaz dans l'âme et ρ_m la masse spécifique.

En supposant donc $E = \text{const.}$, alors d'après l'équation (1), que l'on peut écrire:

$$P . \sigma = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \tag{6}$$

en éliminant P entre 5) et 6), on arrive à l'équation suivante:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)^{\frac{1}{n}} = B \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7}$$

avec:

$$B = \frac{E}{\rho_m} \left(\frac{\sigma . P_m}{m}\right)^{\frac{1}{n}} = \text{const.}$$

Malheureusement l'intégration de cette équation est bien difficile, et quoique la solution exacte ne soit pas encore trouvée, nous pouvons quand même admettre qu'elle sera de la forme:

$$u = f(P,\ x) \tag{8}$$

P étant ici une fonction de t.

Si on suppose encore:

$$E = E_0 . \eta(x) \tag{9}$$

$\eta(x)$ étant, avec une petite approximation, une fonction de deuxième degré. Dans le cas adiabatique, alors l'équation (7) devient:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)^{\frac{1}{n}} = B_0 . \eta(x) . \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{10}$$

B_0 étant le même B, pour E_0.

Mais les choses se compliqueront davantage, si l'on fait intervenir également le phénomène de la combustion de la poudre, voire l'équation (2), qui change la détente.

En effet, en éliminant z entre l'équation (2) et (3) on aboutit à une équation différentielle de la forme:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \gamma(P). \tag{11}$$

Et en tenant compte de l'équation (1), on arrive à une relation de la forme

$$P = \lambda\left(\frac{\partial^3 x}{\partial t^3}\right). \tag{12}$$

Par suite, l'équation finale sera:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot \left[\lambda\left(\frac{\partial^3 x}{\partial t^3}\right)\right]^{\frac{1}{n}} = B_0 . \eta(x) . \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{13}$$

Cette équation, dont l'intégration est bien loin, changera probablement l'aspect du problème de la *Balistique Intérieure.*

En même temps il est bien possible que le phénomène de « turbulence » que l'on exprime dans la *Mécanique des Fluides* par rapport au nombre de Reynolds (le nombre critique), ait une autre explication plus générale.

539.4 RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

PHYSICAL AND MECHANICAL PROPERTIES OF THE RUSSIAN WOOD INTENDED FOR AERONAUTICAL CONSTRUCTIONS

by **M. G. Livada**

The variety of the constructional materials is a salient feature of the russian aeronautical constructions and about equal positions are assigned to all-metal, composite and all-wood types. It must be noted, too, that the use of wood ist not confined to aircrafts only for determined military purposes and the wing loading and Speed of flight of these wood types are high enough (2).

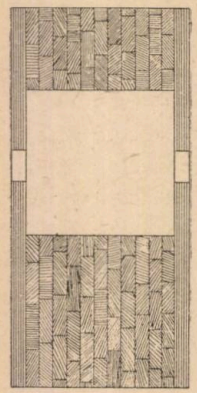


Fig. 1

The wood is employed natural (laminated), as plywood and as compressed wood.

In the present paper it will be given some particulars on ils utilisation and manufacture, and data on its physical and mechanical properties, determined by laboratory tests. The samples tested were drawn at random, from stock-material

a) *The natural wood.* The natural pine is used, as 14 mm. thick laminations, at the spar flanges of the fighter *IAK* — 1. The laminations, at their turn, are composed of 2—5 pieces, someones very narrow (5 mm.). The gluing is donc with a synthetie resin glue, and the glued joints are sometimes in the same horizontal plane (Fig. 1). The annual rings are arrenged in order to balance the warping tendency, due to the variation of the moisture content. With regard to the structural constitution of the wood, it may be observed that no attention is payed to the quality of the annual ring (its width and regularity, the proportion of the spring and autumn wood). It seems that the wood must fulfil only two requirements: it must be healthy and dree of knots.

b) *The plywood.* The plywood is manufactured with bireh veneers, glued together with synthetic resin, on a phenol-formaldehyde basis, in the form of sheet of paper. It will be noted that the resin film is light yellow coloured, transparent and has a great durability.

The plywood is utilized as web of spar and wing covering (on the fighters IAK—1, LAGG—3, MIG—3), and fuselage covering (on the fighter LAGG—3) (1).

In Table I are given the results of tests made with 3 plies birch plywood.

TABLE I

Thickness mm.	No. of plies	Weight in gr/cm²	Tensile strength (kg/cm²) along the grain	across the grain	at 45°	along and across the grain	Adhesive strenght kg/cm²	Torsion and bending requirements
1	3	—	l. 966	600	480	1.664	—	fulfilled
			l. 1.162	760	540	1.868		
			av. 1.058	706	522	1.764		
1,5	3	—	l. 974	493	353	1.467	—	»
			l. 1.234	773	520	1.906		
			av. 1.098	650	437	1.748		
2	3	—	l. 1.086	478	335	1.610	—	»
			l. 1.322	757	481	2.000		
			av. 1.194	584	413	1.778		
2,5	3	—	l. 1.080	570	308	1.650	—	»
			l. 1.230	696	453	1.874		
			av. 1.146	634	383	1.780		
3	3	l. 2.040	740	380	—	1.120	24	»
		l. 2.580	1.120	800	—	1.800	36	
		av. 2.354	918	570	—	1.488	29,8	

l. = limit values
av. = average value

After a 10-days immersion, the tensile strength has dropped at the following valves:

TABLE II

Thickness (mm.)	No. of plies	Tensile strength (kg/cm²)		
		along the grain	accross the grain	along and across the grain
1	3	l. { 812 1.045	592 732	— —
		av. 966	659	1.625
1,5	3	l. { 854 1.300	457 808	— —
		av. 1.041	627	1.668
2	3	l. { 1.048 1.282	473 715	— —
		av. 1.132	530	1.662
2,5	3	l. { 1.032 1.160	527 647	— —
		av. 1.077	574	1.651

l. = limit. values
av. = average value

c) *The compressed wood.* The compressed wood, known under the russian name *Delta* and *Balinit*, was found utilzed at the spar flanges of the fighters LAGG—3 and MIG—3 (1).

It is manufactured by gluing and pressing birch or beech veneers, with a liquid synthetic resin, on a phenol-formaldehyde basis.

This compressed wood was tested and the obtained data are given in Table III (naturel birch and buch are included for comparison purposes):

TABLE III

Physical and mechanical properties			Beeck		Birch	
			compressed	natural (3)	compressed	natural (3)
Construction			Every 11th veneer with grain transverse; all otvers longitudinal	—	Every 11th veneer with grain transverse; all others longitudinal	—
Thickness of board tested			18,98—19,89 mm		18,06—18,37 mm	
Thickness of veneers	arranged along		av. 0,29 mm		av. 0,28 mm	
	arranged across		av. 0,35 mm		av. 0,32 mm	
Specific gravity		l	1,31—1,34	0,54—0,91	1,33—1,36	0,51—0,83
		av.	1,32	0,73	1,35	0,65
Moisture content (V%)		l.	4,0—5,0	—	4,6—6,6	—
		av.	4,6	15	5,8	15
Shrin Kage in volume, from V% to 0% moisture content		l.	1,78—3,15	—	2,05—2,96	—
		av.	2,59	max. 17,6	2,50	max. 14,2
Water absorption %	after 24 hours		2,5	11,9	1,5	—
	after 96 hours		4,4	47,6	3,4	—
	after 168 hours		6,7	52,4	4,3	
Swelling, after 168 hours		*a*	6,4%	10,2%	4,7%	—
Compressive strength, in kg/cm²		*b* l.	1.549—1.647	350—840	1.610—1.814	—
		b av.	1.612	530	1.749	325—850
		c l.	1.224—1.311	—	1.012—1.145	430
		c av.	1.260		1.079	—
Tensile strength, in kg/cm²		*b* l.	2.277—2.410	570—1.800	2.779—3.264	350—2.700
		b av.	2.342	1.350	3.049	1.370
Bending strength in kg/cm²		*a* l.	2.419—3.127	—	3.056—3,647	—
		a av.	2.660		3.322	
		c l.	2.400—2.850	630—1.800	—	650—1.400
		c av.	2.665	1.050	—	1.250
Modulus of Elasticity in bending (kg/cm²)		*a* l.	196.363—235.636	—	284.092—300.250	—
		a av.	211.569		292.750	
		c l.	199.384—432.000	100.000—180.000	277.549—348.955	
		c av.	341.899	160.000	299.525	165.000
		a l.	26,1—30,3		21,47—25,16	
		a av.	28,0		23,53	

As the russian compressed wood *Balinit* is similar to the material marketed under the name *Lignofol*, a comparison has been made from the physical and mechanical stand point.

For that comparison should be possible, boards of the same construction were investigated.

The boards were 30 mm thick, with 36 birchveneers arranged as follows:

— The 1st and 2nd ply, 0.9 mm thick, with the grain along the main edge.

— The 3rd and 34th ply, 0.9 mm thick, with the grain across.

— The 35th and 36th ply, 0.9 mm thick, with the grain along.

— The 4th, 5th, 11th — 13th, 20th — 22nd, 28th — 30th, ply 1.49 mm thick with the grain along.

— The 6th, 10th, 14th, 18th, 19th, 23th, 27th and 31nd ply, 1.49 mm thick, with the grain across.

— The 7th — 9th, 15th — 17th, 24th — 26th, 32nd and 33th ply, 1.49 mm thick, wihe the grain along.

From the stand point of the manufacture, there are the following distinctions:

— *treatment.* Before gluing the Balinit veneers are treated with an alkaline solution; the Lignofol veneers are soaked in a synthetic resin before being pressed.

— *glue.* The russian glue is a phenol-formaldehyde de resin, with a greater proportion of alkaline catalyst. The Lignofol's glue is a phenol-formaldehyde resin, in a liquid bakelite form.

— *pressure.* The Balint is manufactured with a 35 kg cm² specific pressure and the Lignofol's specific pressure is 250—275 kg cm².

The results of the comparative tests are given in Table IV.

TABLE IV

Physical and mechanical properties			Lignofol	Balinit	Natural birch wood
Moisture content, %		l.	4,2—6,4	5.7—8,3	7,0
		av.	5,3	7,1	
Specific gravity		l.	1,34—1,38	1,24—1,33	0,60
		av.	1,38	1,30	
Moisture absorption, (per cent of weight)	after 8 days		3,98	7,96	—
	after 20 days		6,20	12,50	20,0
Water absorption, (per cent of weight)	after 8 days		12,2	27,5	—
	after 20 days		16,8	29,8	105,0

TABLE IV (continuation)

Physical and mechanical properties			Lignofol	Balinit	Natural birch wood
Swelling, in mm. (due to moisture absorption)	*a*	after 8 days	3,0	3,5	—
		after 20 days	6,7	8,2	
Swelling, in mm. (due to water absorp.)	*a*	after 8 days	13,0	25,3	—
		after 20 days	17,7	27,3	
Shrinkage, in mm. (when dried from V⁰/₀ t₀ 0⁰/₀ moisture content)	*a*	l.	0,17—0,57	0,38—054	
		av.	0,362	0,477	
Compressive strenght (kg/cm²)	*b*	l.	1.280—1.820	1.048—1.448	770
		av.	1.614	1.272	
	c	l.	1.050—1.690	800—1.400	—
		av.	1.409	1.056	
Brinell hardness		l.	20,5—34, 5	15,5—22,0	3,7—6,3
		av.	28,2	19,1	4,9 (3)
Bending strength (kg/cm²)	*a*	l.	1.990—3.290	1.315—2.615	—
		av.	2.617	2.075	
	c	l.	2.060—2.720	1.750—2.450	1.490
		av.	2.423	2.080	
Resilience under impact. (kgm/cm²)	*a*	l.	0,34—1,3	0,50—0,94	
		av.	0,85	0,70	
	c	l.	0,98—1, 37	0,24—0,54	0,33
		av.	1,19	0,405	
Tensile strength, in kg/cm²	*b*	l.	1.500—2.590	1.225—2.065	—
		av.	2.209	1.692	
Shering strength, in kg/cm²	*b*	l.	48—268	73—161	—
		av.	152	107	
Modulus of Elasticity in compression (kg/cm²)		l.	244.000—340.000	257.000—347.000	175.000
		av.	285.000	302.000	
Modulus of Elasticity in bending (kg/cm²)	*c*	l.	179.000—289.000	199.000—277.000	124.000
		av.	243.000	244.000	
Modulus of Elasticity in tension (kg/cm²)	*b*	l.	221.000—298.000	244.000—332.000	177.300
		av.	258.000	278.000	

a perpendicular to the plies
b parallel to the plies and along the grain
c parallel to the plies and across the grain
l = limit values
av. = average value

REFERENCES

1. Gütewerte russischer Hölzer aus Beuteflugzeugen, I. THEINER. *Luftwissen*, Bd. 10 (1943), Nr. 5, p. 103—104.
2. Holzgütewerte der Sowjet-Flugzeuge *Holz als Roh-und Werkstoff* (1943), Nr. 7, p. 207.
3. Technologie des Holzes, F. KOLLMANN, J. Springer, Berlin, 1936, Tafel I.

539.4 RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

NOTE SUR L'INFLUENCE DE L'INSPECTION TECHNOLOGIQUE SUR LES RÉSULTAS DES ESSAIS DU BOIS D'AVIATION

par **M. G. Livada**

L'auteur étudie d'un point de vue statistique la relation entre la structure technologique du bois roumain d'aviation (epicea) et ses caractéristiques, physiques et mécaniques.

On conclut que l'inspection technologique peut assurer la résilience et le poids spécifique minimum exigé, mais elle est insuffisante pour juger la compression axiale et l'effort dynamique sur un appui.

Finalement on propose un « indice de confiance » pour exprimer la liaison, plus ou moins étroite, entre certains éléments macroscopiques limites et les qualités correspondantes, physiques et mécaniques.

I. Les propriétés physiques et mécaniques du bois dépendent de sa structure et de son état hygrométrique. Mais, quoique cette dépendance soit certaine (et même mesurable, pour l'humidité), les connaissances actuelles ne permettent pas de fixer d'avance les caractéristiques mécaniques d'un échantillon, seulement à l'aide d'un examen de sa constitution technologique.

Le problème est difficile à resoudre pour deux raisons.

Premièrement parce qu'on ne connaît pas tous les éléments variables de la structure du bois, qui peuvent avoir une influence sur ses qualités mécaniques. On a établi, jusqu'à présent, que trois éléments macroscopiques, qu'on a crus mieux exprimer sa valeur mécanique: la texture, le grain et sa régularité. Mais probablement il y en a d'autres, inconnus, qui peuvent avoir la même importance.

Secondement, le problème est difficile, parce que, même si on connaît toutes les variables, on ne peut envisager facilement une méthode pratique pour les étudier séparément.

Mais si on ne peut formuler, pour le moment, la solution complète du problème, on peut lui chercher une solution pratique suffisamment exacte pour les applications constructives. Cette solution pratique a son importance, notamment pour le bois d'aviation lequel subit des nombreux essais mécaniques.

Pour cette raison on trouve dans les cahiers des charges les plus anciens (1), des recommandations technologiques, au but évident de limiter l'investigation et le rejet du matériel. Mais on a dû attirer l'attention sur le caractère relatif de ces recommandations en soulignant (2), que les essais au laboratoire, seuls, peuvent justifier les qualités physiques et mécaniques.

II. Si on veut étudier la relation entre la structure technologique et les caractéristiques mécaniques correspondantes, il faut commencer par examiner d'abord comment on doit poser le problème, quelle est la méthode à suivre et de quelle manière on doit regarder les résultats obtenus, pour en formuler les conclusions.

Parce qu'on ne connaît ni tous les éléments de la structure, ni l'influence de chacun sur les qualités mécaniques, on est obligé de les étudier tous ensemble.

En second lieu, on ne peut pas fixer pour chaque élément une seule dimension, mais on doit lui imposer une limite, supérieure ou inférieure.

Il s'en suit que, la structure technologique soumise à l'étude doit être définie par les conditions limites imposées à ses éléments.

À cette structure, ainsi définie, et pour chaque caractéristique mécanique étudiée, vont correspondre des ensembles des résultats, et la liaison entre la structure technologique et la qualité mécanique sera mise en évidence en regardant ces ensembles d'un point de vue statistique.

Maintenant si on a déterminé la distribution des résultats pour une essence et pour une structure technologique définie, on peut poser le deuxième problème de savoir si l'examen technologique préalable peut assurer la satisfaction des conditions minima, physiques et mécaniques, imposées par les cahiers des charges.

La solution prend la même forme statistique si on indique le pourcentage probable des pièces acceptées ou refusées.

Les deux solutions proposées ont une validité statistique, c'est-à-dire seulement dans le cas d'un nombre suffisamment grand d'épreuves.

III. Les deux problèmes énoncés plus haut ont été etudiés dans un cas concret.

Les conditions des essais ont été les suivantes:

a) *Essence.* On a choisi l'epicea (picea excelsa) parce que cette essence est fréquemment employée dans les constructions aéronautiques ou elle subit une inspection technologique et des essais au laboratoire. Puis, grâce à sa structure hétérogène, on peut l'examiner avec une précision suffisante et lui déterminer la valeur des éléments macroscopiques. Afin qu'on puisse limiter l'influence probable de la station, on a essayé le matériel de même provenance.

b) *Structure technologique.* Le bois débité en planches et madriers, a été soumis à une inspection, pour choisir les pièces qui ont eu la structure, définie par les éléments macroscopiques et les conditions limites suivantes:

— la largeur moyenne des accroissements annuels $\leqslant 5$ mm;

— la texture ou pourcentage du bois final $\leqslant 33\%$;

— écart % entre les accroissements les plus larges et la largeur moyenne $\leqslant 33\%$.

L'inspection a été exécutée à l'occasion d'une réception des matériaux, sur des pièces de 4 à 8 m de longueur et de 40 à 65 mm d'épaisseur.

c) *Essais.* On a exécuté les essais suivants:

— la determination du poids de l'éprouvette de $2 \times 2 \times 30$ cm ($= 0{,}12 \times$ poids spécifique);

— la détermination de la résistance à la compression axiale;

— la détermination de la résilience totale;

— la détermination de l'effort dynamique sur un appui.

La forme et les dimensions des éprouvettes ont été les suivantes:

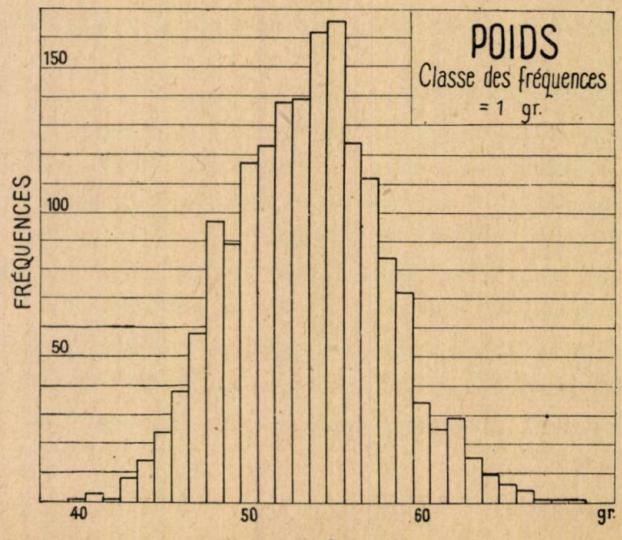
— pour la compression axiale, $2 \times 2 \times 3$ cm;

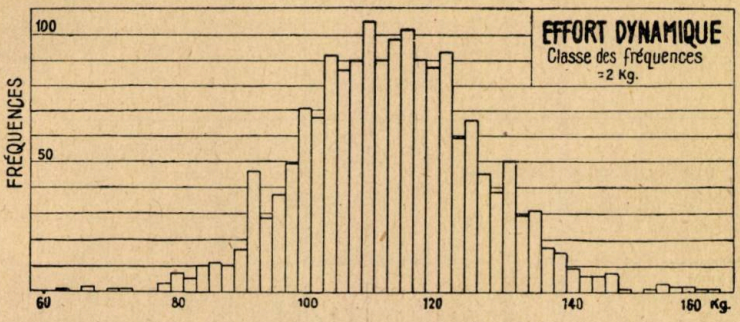
— pour le poids, la résilience et l'effort dynamique: $2 \times 2 \times 30$ cm.

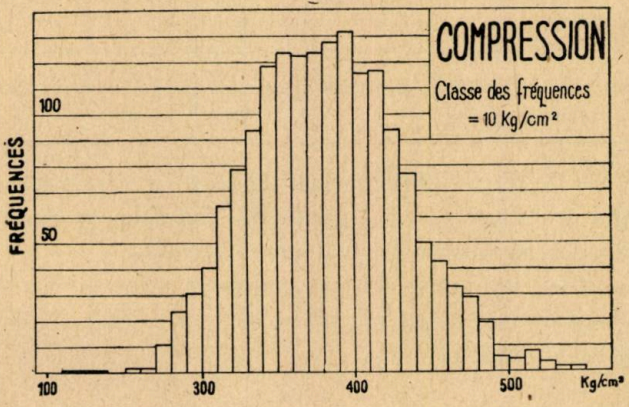
d) *Nombre des essais.* Pour obtenir des résultats susceptibles d'une interprétation statistique, on a exècuté un assez grand nombre d'essais. Ainsi pour la détermination:

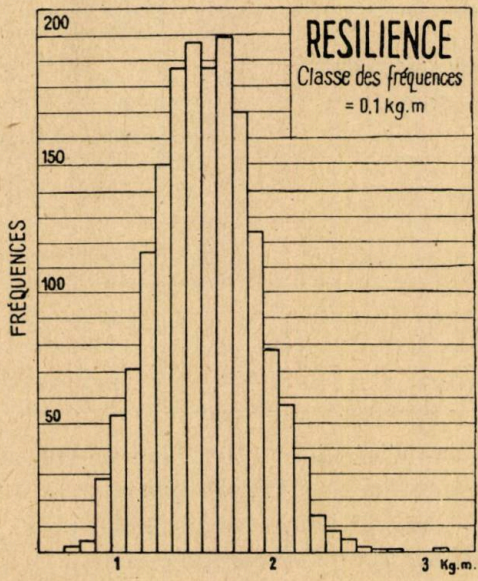
— du poids de l'éprouvette $2 \times 2 \times 30$ cm . . 1695
— de la résistance à la compression 1707
— de la résilience totale 1681
— de l'effort dynamique 1686

Avec les fréquences des résultats on a dressé les graphiques ci-joints.




EFFORT DYNAMIQUE
Classe des fréquences
=2 Kg.
FRÉQUENCES
100
50
60
80
100
120
140
160 Kg.


COMPRESSION
Classe des fréquences
= 10 Kg/cm²
FRÉQUENCES
100
50
100
300
400
500
Kg/cm²


RESILIENCE
Classe des fréquences
= 0,1 Kg.m
FRÉQUENCES
200
150
100
50
1
2
3 Kg.m.

Les valeurs moyennes et les écarts des valeurs extrêmes sont donnés dans le Tableau I.

TABLEAU I

Caractéristiques physiques et mécaniques	Poids de l'éprouvette	Compression axiale	Résilience totale	Effort dynamique
	gr	kg/cm²	kgm	kg
Valeur moyenne	53,4	382,3	1,58	114
Écart entre les valeurs extrêmes et la valeur moyenne	— 13,4 + 15,6	—171,3 + 167,7	— 0,88 + 1,52	— 51 + 51
Écart % des valeurs extrêmes par rapport à la valeur moyenne	— 25,5 + 29,2	— 44,8 + 43,9	— 55,7 + 96,2	— 49,2 + 49,2

IV. L'étude de ces résultats permet de faire les remarques suivantes:

a) Malgré le triage technologique, la distribution des valeurs est assez grande, vu les écarts des valeurs extrêmes.

b) Si on veut appliquer les prescriptions minima des cahiers des charges aéronautiques, alors on est conduit à rejeter le materiel dans les pourcentages suivants:

TABLEAU II

Caractéristiques physiques et mécaniques	Les conditions imposées par le cahier des charges					
	roumain		français		italien	
	min.	rejet %	min.	rejet %	min.	rejet %
Poids de l'éprouvette, gr	48	8,7	50	19,9	48	8,7
Résistance à la compression, kg/cm² . .	350	27,6	335	20,6	320	10,5
Résilience totale, kgm	1	1,43	1,2	—	0,76	0,12
Effort dynamique, kg	100	15	111	37,4	84	1,2

c) Si on veut avoir un rejet de 10% alors on doit abaisser les valeurs minima de la compression et de l'effort dynamique aux valeurs suivantes:

— approx. 320 kg/cm² pour la compression;

— » 97 kg pour l'effort dynamique.

On peut regarder ces valeurs comme les résultats des valeurs minima imposées par le cahier des charges, mais avec l'application d'une tolérance de 10%.

IV. Les conclusions qu'on peut en déduire sont les suivantes:

a) La concordance entre la structure technologique, définie par un ensemble de conditions limites, et les caractéristiques physiques et mécaniques ne peut s'exprimer que statistiquement, en donnant pour chaque caractéristique sa valeur moyenne et les écarts maxima (ou mieux l'écart moyen quadratique σ). Plus la distribution est restreinte (σ petit) plus on a une correspondance plus étroite entre la structure et la caractéristique mécanique, ou d'une autre manière, la structure traduit mieux cette caractéristique mécanique.

b) Le triage technologique, basé à la fois sur la texture, le grain et sa régularité, donne, pour l'epicea roumain une assez grande distribution des caractéristiques mécaniques. Probablement le triage déplace seulement la valeur moyenne; mais cette hypothèse doit être vérifiée par des essais plus amples.

c) Généralement on peut substituer, pour des raisons pratiques, l'examen à la détermination par des essais d'une caractéristique mécanique. Mais on est obligé de donner en même temps une indication sur la confiance qu'on doit accorder à cette substitution.

Pour cette raison on propose d'établir un «indice de confiance» de chaque substitution, défini par le pourcentage maximum des pièces probablement acceptées. Cet indice sera valable pour une structure déterminée par des conditions limites, et pour un chiffre limite de la caractéristique mécanique substituée.

d) En ce qui concerne l'epicea roumain destiné à la construction aéronautique, l'inspection technologique donne satisfaction complète pour la résilience, une satisfaction admissible pour le poids spécifique (le rejet $< 10\%$), mais une incertitude pour la compression et l'effort dynamique. Il en résulte que dans les cas ou la résilience et le poids spécifique seules intéressent, l'inspection technologique peut être suffisante; mais quand il s'agit de la compression ou de l'effort dynamique elle doit être suivie d'essais au laboratoire.

L'indice de confiance, calculé approximativement à l'aide des chiffres du Tableau II, donne:

— 92% pour le poids spécifique
— 72% pour la résistance à la compression
— 98% pour la résilience totale
— 85% pour l'effort dynamique

par rapport aux chiffres minima exigés par le cahier roumain des charges.

RÉFÉRENCES

1. Sous-Secrétariat d'État de l'aéronautique et des transports aériens. Cahier des charges générales pour la fourniture des bois destinés aux appareils volants. Ed. 1920.
2. Idem, Instruction relative à l'application du cahier des charges générales pour la fourniture des bois destinés aux appareils volants. Ed. 1920.

LA FORMATION D'UN COMPOSÉ DE COBALT DE COULEUR VERTE

par **Er. Toporescu**

L'auteur montre que dans des conditions bien determinées il se forme un précipité de cobalt de couleur verte qui parraît être un hydrate de cobalt sans préciser la composition faute d'un appareil pour microstructure a rayons X.

A la suite des expériences que j'ai fait ayant comme but l'étude de la variation de couleur que subit une solution acqueuse de chlorure de cobalt, j'ai obtenu, dans des conditions que je veux mentioner une substance de couleur verte qui est d'après tous les indices un hydrate de cobalt.

Ainsi, en employant un dispositif formé d'un tube en verre d'un diamètre de 10 mm, long de 65 cm, dans le quel j'ai introduit des fils très minces en verre (coton de verre), pour avoir un ensemble de tubes capillaires, j'ai observé qu'en mettant un des buts du tube dans une solution acqueuse en chlorure de cobalt 10%, se forme à la partie supérieure des cappillaires une couleur verte. Cette couleur ne disparait pas par un lavage des cappillaires avec de l'eau distillée bouillante tandis que avec une solution d'acide chlorhidrique la substance verte réactione en nous donnant les nuances caractéristiques du chlorure de cobalt avec de l'acide chlorhydrique, et ainsi, les capillaires peuvent être lavées.

Cette observation m'a conduit à refaire l'expérience mais, cette fois, avec des capillaires formées par la poudre de silicate de sodium car l'hypothèse que j'ai fait dans la production du précipité vert à été que les fils en verre, qui forment les capillaires, se disolvent dans l'eau dans la quelle a été dissout le chlorure de cobalt pour donner une solution diluée de silicate de sodium et que, cette solution, qui a un caractère

alcalin, réactionne avec la chlorure de cobalt pour donner, dans cette condition, un hydrate de cobalt de couleur verte.

Les tubes en verre dans les quels j'ai mis la poudre de silicate, trié a l'aide des tamis standard, ont un diamètre de 4 mm et un longueur de 20 cm. En répetant les expériences décrites plus haut, j'obtiens avec la poudre qui passe par le tamis No. 30 (900 mailles par cm^2) les meilleurs résultats, c'est-à-dire, la couleur verte se forme dans un temps très court et sur une distance de quelques centimètres. En coupant les tubes on cueille la substance qui est stabile dans les conditions du laboratoire.

Pour analiser cette substance je l'ai soumise à un lavage par décantation avec un mélange alcool-eau 50% jusqu'à ce que l'ion chlore a disparut du filtrat.

Les déterminaisons analytiques quantitatives, avec les substances ainsi obtenues, n'offrent pas la possibilité de tirer la conclusion que le précipité vert est l'hydrate de cobalt parce que la substance contient du silicate de sodium et de la silice en quantité variable d'après le temps de contact mis en expérience. Seulement une déterminaison avec les rayons *X* pourraient me donner la possibilité de préciser la nature de la substance car, d'après une étude publiée par Weiser et Milligan [1]), par la quelle ils montre que les hydrates de cobalt vert et bleu sont cristalisés et qu'ils constituent une seule et la même varieté, je pourrais préciser si le précipité obtenu, dans les conditions décrites, est l'hydrate de cobalt.

Bernardi [2]) obtient un précipité semblable en traitant à froid des solutions très diluées des diférentes sels de cobalt par une petite quantité de soude, précipité contenant toujours du sodium.

---

[1]) P. Pascal, Traité de chimie minérale, Nr. 10, p. 306.

[2]) Bernardi, *Gazz. chim. ital.*, v. 57 (1927), p. 232 et 58 (1928), p. 743.

ZWEI EICHENFORMEN AUS RUMÄNIEN

von **C. C. Georgescu** und **P. Cretzoiu**

Es werden zwei neue Eichenformen aus Rumänien beschrieben: eine für Quercus polycarpa und die zweite für Quercus rosacea.

Nachdem wir unsere Arbeiten über die *Quercus petraea* × *Quercus robur*-Hybride und über die Sekt. Sessiliflorae bereits publiziert hatten, erhielten wir weiteres Material und können jetzt die Formenkreise *Quercus rosacea* und *Quercus polycarpa* mit je einer Form erweitern.

1. *Quercus polycarpa Schur.*

f. acuta C. Georg. u. Cretz., nov. f.

Foliorum lobi acuti. — Distr. Vâlcea: im Walde Sărăcinesti, (leg. J. Lupe, 5.X.1942, in herb. Politechn. București). — Fig. 1.

Diese Form, vom Arttypus durch die zugespitzten Blattlappen gut abgegrenzt, scheint eine übergangsform zur Quercus Dalechampii Ten. darzustellen. Bisher waren von Quercus polycarpa Schur noch keine abweichende Formen bekannt.

F g. 1. *Quercus polycarpa Schur f. acuta.* G. Georg. & Cretz., Blatt.

2. *Quercus rosacea Bechst.* (Quercus petraea × Quercus robur)

var. coriacea (*Bechst.*) *C. Georg. u. P. Cretz.*, nov. var. — Syn.: Quercus pedunculata var. coriacea Bechst., apud Bluff. et Fingerh., II, 1825, p. 533. — Quercus robur var. crassiuscula Borb., in Oest. Bot. Zeitschr. XXXVIII, 1888, p. 276. — Quercus robur var. typica f. coriacea Aschers. u. Graebn., Synops. IV, 1911, p. 500.

Blätter oval, dick, lederartig, unterseits behaart, oberseits kahl, mit kurzen, einfachen oder sehr selten hier und da etwas gezähnten, abgerundeten, gegen die Blattspitze zu verkleinerten Lappen; Blattstiel bis 10 mm lang; Blattbasis geöhrt. Früchte auf einem bis 4 cm langen Stiel. Fruchtschuppen nicht fest angeklebt, zugespitzt, bewimpert. — Fig. 2.

Distr. Someş: Gâlgău, leg. L. Richter, 25.VII.1890, det. V. Borbas sub Q. Robur v. crassiuscula, in Herb. Inst. Bot. Univ. Bucureşti.

Wenn man diese neue Varietät in Betracht zieht, so lassen sich die Varietäten von Quercus rosacea wie folgt gruppieren:

1 a. Blätter unterseits behaart 2
1 b. Blätter unterseits kahl 3
2 a. Fruchtstiel höchstens 1 cm lang *var. Csatoi (Borb.) C. Georg. u. Cretz.*
2 b. Fruchstiele bis 4 cm lang *var. coriacea (Bechst.) n. c.*
3 a. Blätter fast sitzend oder Blattstiel nur wenige mm lang *var. pseudosessilis (Schur) C. Georg. u. Cretz.*
3 b. Blattstiel 3—12 mm lang *var. obovata (Lasch) C. Georg. u. Cretz.*

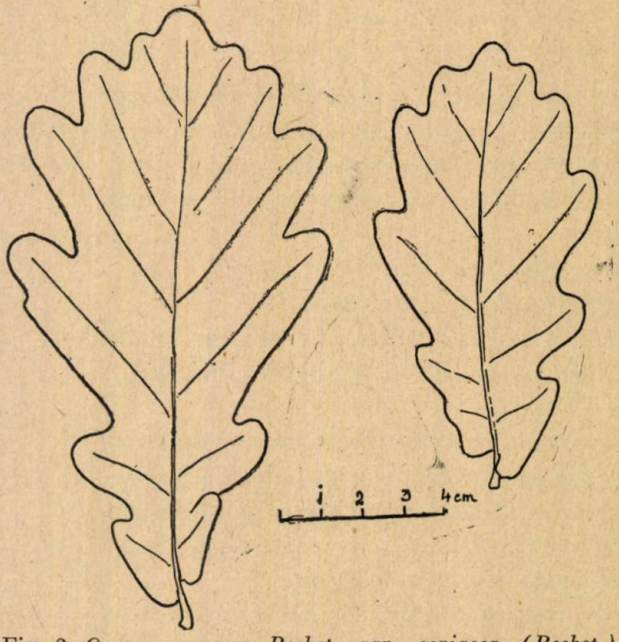


Fig. 2. *Quercus rosacea Bechst. var. coriacea (Bechst.)* C. Georg. & Cretz. zwei Blätter auf demselben Ast.

LITERATUR

Beldie, A. & P. Cretzoiu, Studiu sistematic al Gorunului din România. *Analele I.C.E.F.*, 7 (1942).

Cretzoiu, P., Considerațiuni cu privire la *Quercus polycarpa Schur.*, *Rev. Pădurilor*, 52 (1940).

Georgescu, C. C. & Cretzoiu P., Formele hibridului *Quercus petraea* × *Quercus robur* în România. Die Formen des Bastardes *Quercus petraea* × *Quercus robur* in Rumänien. *Bull. Grăd. Bot. Muz. Bot. Cluj*, 21 (1941) XX.

Schwarz, O., Monographie der Eichen Europas und des Mittelmeergebietes, I., Berlin, 1937.

531.4 MÉCANIQUE

SUR LES TRAJECTOIRES DES BOMBES D'AVION[1])

par **E. Carafoli** et **E. E. Stihi**

Le bombardament aérien est un des plus redoutables moyens de la guerre moderne. Il n'est efficace que si le tir est précis. Cette précision est obtenue grâce au *viseur de bombardement* dont la construction tient compte des *trajectoires des bombes d'avion.* Celles-ci sont des projectiles de *forme carénée*, pourvus d'empennages appropriées dont la rôle principal serait de maintenir l'axe dela carène parallèle à la tangente de la trajectoire. Ainsi, le mouvement d'une bombe est celui de son centre de gravité. Les petites oscillations du début, très vite amorties grâce aux empennages, sont complètement négligeables si les bombes sont lancées horizontalement.

La détermination de la trajectoire, très simple quant à la mise en équations, est un problème difficile et très laborieux à résoudre, dès qu'il s'agit d'un calcul effectif, dont les résultats seraient immédiatement utilisés dans les applications.

À cette fin, on emploie des *méthodes rigoureuses*, basées pour la plupart sur des solutions *par arcs successifs*, comme presque dans tous les problèmes de balistique, ou des *méthodes empiriques*, basées sur des résultats expérimentaux. Les premières sont extrêmement laborieuses est nécessitent par ailleurs des connaissances spéciales, même pour les applications les plus simples; les secondes demandent une expérimentation très riche, souvent difficile à réaliser.

Aussi, avons-nous essayé de déterminer les caractéristiques de la trajectoire par des méthodes simples, qui, tout en conservant le caractère rigoureux des équations, aboutissent cependant à des formules finales facilement applicables par les calculateurs des *tables de tir aérien.*

---

[1]) Les principes de la méthode et les résultats obtenus ont été communiqués à l'*Académie des Sciences de Roumanie*, séance du 19 novembre 1943.

1. *Préliminaires.*

Nous allons considérer le mouvement d'un point matériel mobile (centre de gravité d'une bombe d'avion) doué d'une vitesse initiale de grandeur et direction données, sous l'influence de la *gravitation* et de la *résistance de l'air*. Soient:

A le point de départ du mobile,

O le pied (au sol) de la verticale passant par A,

B le point de chute (au sol) du mobile,

N un point quelconque de la trajectoire.

Le mouvement sera rapporté aux deux axes OB (axe des x) et OA (axe des z) (fig. 1).

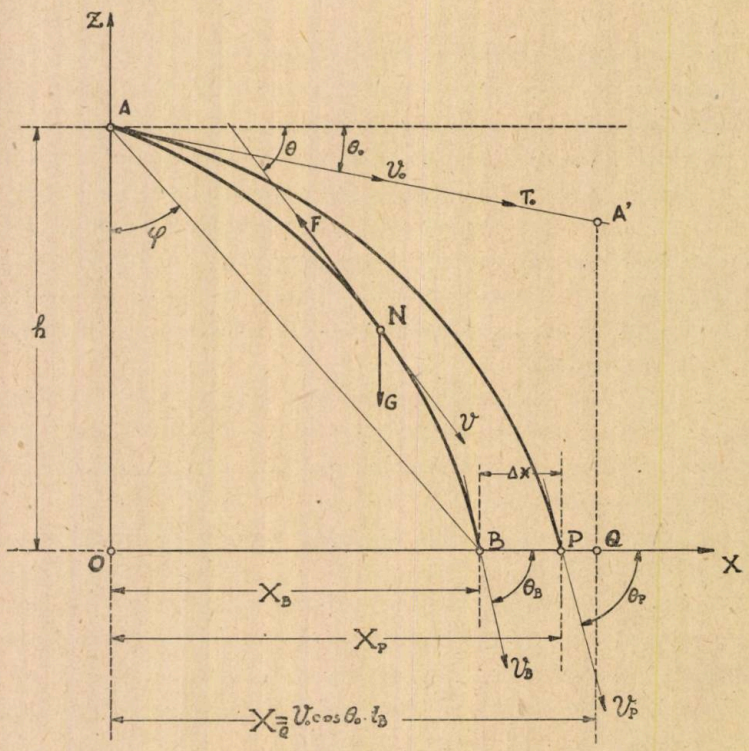


Fig. 1.

Soient aussi:

θ l'angle de la vitesse avec la direction positive des x,

θ_0 la valeur de cet angle au point A,

θ_B la valeur de cet angle au point B.

La résistance aérodynamique F, que nous allons mettre sous la forme (couramment employée en aérodynamique)

$$F = \frac{\rho}{2} S V^2 C = \frac{\rho_0}{2}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) S V^2 C, \tag{1,1}$$

est tangente à la trajectoire et dirigée en sens inverse du mouvement.

Nous allons noter par:

D = diamètre maximum de la bombe,

$S = \frac{\pi}{4} D^2$ = section droite maximum de la bombe (maître-couple),

C = coefficient de résistance,

M = masse du projectile,

G = poids du projectile,

V_0 = vitesse initiale,

V = vitesse au point N,

δ = densité de l'air à la hauteur Z,

ρ_0 = densité de l'air au sol,

h = hauteur du point A.

Nous savons que le coefficient de résistance C dépend du nombre de Reynold's et les essais nous montrent que cette variation est représentée par la formule:

$$C = \frac{C_0}{\left(\frac{DV}{\nu}\right)^n} \tag{1,2}$$

où C_0 *est une constante tant que les vitesses sont inférieures à celle du son, ce qui est parfaitement exact pour le cas du bombardement aérien.* Nous avons noté par ailleurs:

$\frac{DV}{\nu}$ = nombre de Reynold's,

n = coefficient numérique constant,

μ = coefficient de viscosité à la hauteur Z,

μ_0 = coefficient de viscosité au sol,

$\nu = \frac{\mu}{\rho}$ coefficient de viscosité cinématique.

La rèsistance aérodynamique prend ainsi la forme

$$F = \frac{\rho_0}{2}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) S V^2 C_0 \frac{\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^n}{(DV)^n}. \tag{1,3}$$

La variation de la densité en fonction de la hauteur est donnée par les formules de l'atmosphère standard:

$$(1,4) \qquad \frac{\rho}{\rho_0} = (1 - 0{,}0000226\ z)^{4{,}255}.$$

Si nous précisons d'autre part les conditions au sol:

température = 15° C,
pression = 760 mm,
densité = 0,125,

la variation du coefficient de viscosité, qui est une fonction plus complexe de la température, peut se mettre sous une forme simple, en fonction de la hauteur seule:

$$(1,5) \qquad \frac{\mu}{\mu_0} = (1 - 0{,}000005135\ z)^2\ (1 - 0{,}0000226\ z)^{0{,}5}\ ^{1})$$

Quant à la constante C_0, qui ne dépend que de la forme du projectile, on la détermine par des essais réalisés au sol, dans les Tunnels Aérodynamiques, sur un modèle réduit de la bombe considérée, à une vitesse constante donnée. Soient:

v_m = vitesse des essais,
D_m = diamètre du modèle.

Si Cx est le coefficient de résistance ainsi obtenu sur le modèle, et si nous désignons par $\nu_0 = \frac{\mu_0}{\rho_0}$ le coefficient de viscosité cinématique, pour les conditions de l'air ou sol, nous aurons:

$$Cx = \frac{C_0}{\left(\frac{D_m V_m}{\nu_0}\right)^n} = \left(\frac{\mu_0}{\rho_0}\right)^n \frac{C_0}{(D_m . V_m)^n},$$

ce qui donne:

$$(1,6) \qquad C_0 = \left(\frac{\rho_0}{\mu_0}\right)^n (D_m V_m)^n\, Cx.$$

Désignons plus loin par K l'expression:

$$(1,7) \qquad K = \frac{\rho_0}{2}\left(\frac{S}{G}\right) V_m^n \left(\frac{D_m}{D}\right)^n Cx;$$

---

[1]) Émile Allard, Cours d'Aéronautique, pages 5 et 193.

ceci nous permet de mettre la résistance aérodynamique sous la forme:

$$(1,8) \qquad \frac{F}{M} = gK\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1-n}\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{n} V^{2-n} = g\,K\zeta\,v^{2-n}$$

avec

$$(1,9) \qquad \zeta = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1-n}\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{n}.$$

Pour les altitudes usuelles de bombardement, qui ne dépassent guére les 5000 m, on peut développer ζ en fonction de Z, d'après (1,4), (1,5), et la remplacer par une expression linéaire:

$$(1,10) \qquad \zeta = 1 - ez$$

avec

$$(1,11) \qquad e = 0{,}000096 - 0{,}000075\,n \cong 0{,}000080\,n \text{ (pour } n \cong 0{,}20 - 0{,}22).$$

2. *Les équations du mouvement.*

En nous rapportant à la figure 1 et aux notations indiquées précédemment, nous pouvons écrire:

$$(2,1) \qquad \begin{cases} M\dfrac{d^2x}{dt^2} = -F\cos\theta \\ M\dfrac{d^2z}{dt^2} = F\sin\theta - gM. \end{cases}$$

Mettons plus loin:

$$(2,2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v\cos\theta \quad \text{et} \quad \dfrac{d^2x}{dt^2} = \cos\theta\dfrac{dV}{dt} - V\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt} \\ -\dfrac{dz}{dt} = v\sin\theta \quad \text{et} \quad -\dfrac{d^2z}{dt^2} = \sin\theta\dfrac{dV}{dt} + V\cos\theta\dfrac{d\theta}{dt}. \end{cases}$$

En multipliant la première équation par $\sin\theta$ et la seconde par $\cos\theta$, et en introduisant, pour $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ et $\dfrac{d^2z}{dt^2}$, les expressions (2,1), on obtient:

$$(2,3) \qquad \frac{dt}{d\theta} = \frac{v}{g\cos\theta}$$

et la première équation (2,2) devient, de même:

$$(2,4) \qquad -\frac{d(v\cos\theta)}{d\theta} = K\zeta V^{3-n}$$

ou

$$(2,5) \qquad \left(\frac{V_0\cos\theta_0}{V\cos\theta}\right)^{2-n} = 1 + (2-n)\,K\,(V_0\cos\theta_0)^{2-n}\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\zeta\,d\theta}{\cos^{3-n}\theta}.$$

En désignant par I l'expression:

$$(2,6) \qquad I = I(\theta) = (2-n)\, K\, (V_0 \cos\theta_0)^{2-n} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\zeta\, d\theta}{\cos^{3-n}\theta}$$

nous pouvons écrire finalement:

$$(2,7) \qquad \frac{V\cos\theta}{V_0\cos\theta_0} = (1+I)^{-\frac{1}{2-n}}.$$

Nous avons plus loin:

$$(2,8) \quad \begin{cases} dx = \dfrac{V^2}{g}\, d\theta \\ -dz = \dfrac{V^2}{g}\, tg\theta\, d\theta \\ dt = \dfrac{V}{g}\, \dfrac{d\theta}{\cos\theta} \end{cases}$$

qui deviennent, en remplaçant V par l'expression (2,7) et en intégrant:

$$(2,9) \quad \begin{cases} x = \dfrac{(V_0\cos\theta_0)^2}{g} \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta} (1+I)^{-\frac{2}{2-n}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\ h = z = \dfrac{(V_0\cos\theta_0)^2}{g} \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta} (1+I)^{-\frac{2}{2-n}} tg\theta\, \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\ t = \dfrac{V_0\cos\theta_0}{g} \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta} (1+I)^{-\frac{1}{2-n}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \end{cases}$$

3. *Principe de la méthode.*

Les équations précédentes (2,9) nous donnent les caractéristiques de la trajectoire en chaque point N, en fonction de θ. Mais pour les applications il est nécessaire de connaître les résultats finals: X_B, t_B, θ_B, etc.

Désignons, pour cela, par Xp, tp, θp, etc., les éléments correspondants de la parabole parcourue par la bombe dans le vide (fig. 1); il est facile de voir qu'on aura:

$$(3,1) \quad \begin{cases} tg^2\theta_p - tg^2\theta_0 = \dfrac{2gh}{(V_0\cos\theta_0)^2} \\ tg\theta_p - tg\theta_0 = \dfrac{gXp}{(V_0\cos\theta_0)^2} \\ tg\theta_p - tg\theta_0 = \dfrac{gt_p}{V_0\cos\theta_0}. \end{cases}$$

Notons par ailleurs:

$$\Delta\theta = \theta_B - \theta_p, \tag{3,2}$$

et remarquons que la deuxième équation (2,9), en prenant pour seconde limite $\theta = \theta_B = \theta_p + \Delta\theta$, peut s'écrire:

$$\left\{ h = \frac{(V_0 \cos\theta_0)^2}{g} \int_{\theta_0}^{\theta_p} (1+I)^{-\frac{2}{2-n}} \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\, d\theta + \frac{(V_0\cos\theta_0)^2}{g} \int_{\theta_p}^{\theta_p+\Delta} (1+I)^{-\frac{2}{2-n}} \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\, d\theta \right. \tag{3,3}$$

La valeur $\Delta\theta = \theta_B - \theta_p$ est très petite, comme nous allons le voir par la suite, de manière qu'on puisse remplacer, en première approximation, la seconde intégrale du deuxième membre, par une valeur approchée:

$$\frac{(V_0\cos\theta_0)^2}{g} (1+Ip)^{-\frac{2}{2-n}} \frac{\sin\theta_p}{\cos^3\theta_p} \Delta\theta,$$

où $I_p = I(\theta_p)$. On obtient finalement:

$$\Delta\theta \frac{\sin\theta_p}{\cos^3\theta_p} \frac{1}{(1+Ip)^{\frac{2}{2-n}}} = \frac{gh}{(V_0\cos\theta_0)^2} - \int_{\theta_0}^{\theta_p} \frac{1}{(1+I)^{\frac{2}{2-n}}} \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\, d\theta. \tag{3,4}$$

D'une manière analogue on peut écrire:

$$\left\{ \begin{aligned} X_B &= \frac{(v_0\cos\theta_0)^2}{g} \int_{\theta_0}^{\theta_p} (1+I)^{-\frac{2}{2-n}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} + \frac{(V_0\cos\theta_0)^2}{g} (1+I_p)^{-\frac{2}{2-n}} \frac{\Delta\theta}{\cos^2\theta_p} \\ t_B &= \frac{V_0\cos\theta_0}{g} \int_{\theta_0}^{\theta_p} (1+I)^{-\frac{1}{2-n}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} + \frac{V_0\cos\theta_0}{g} (1+I_p)^{-\frac{1}{2-n}} \frac{\Delta\theta}{\cos^2\theta_p} \end{aligned} \right. \tag{3,5}$$

et en remplaçant $\Delta\theta$ par son expression tirée de (3,4), on a finalement:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{g\, tg\theta_p\, X_B}{(V_0\cos\theta_0)^2} &= \frac{gh}{(V_0\cos\theta_0)^2} \int_{\theta_0}^{\theta_p} \frac{tg\theta p - tg\theta}{(1+I)^{\frac{2}{2-n}}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\ \frac{g\, tg\theta_p\, t_B}{V_0\cos\theta_0 (1+I_p)^{\frac{1}{2-n}}} &= \frac{gh}{(V_0\cos\theta_0)^2} + \int_{\theta_0}^{\theta_p} \left[\frac{tg\theta p}{(1+I_p)^{\frac{1}{2-n}}} - \frac{tg\theta}{(1+I)^{\frac{1}{2-n}}} \right] \\ & \qquad \frac{1}{(1+I)^{\frac{1}{2-n}}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta}. \end{aligned} \right. \tag{3,6}$$

[1]) On peut arriver d'ailleurs directement au même résultat, en développant en série TAYLOR, l'expression (2,9) autour du point $\theta = \theta p$, avec ΔO comme accroissement petit et en négligeant les termes en $(\Delta O)^2$, $(\Delta O)^3$, ...

Pour mieux mettre en évidence les déviations de la trajectoire réelle par rapport à la parabole, dont les caractéristique Xp, tp, θp, etc., sont faciles à déterminer, d'après les relations (3,1), on mettra, de même que pour $\Delta\theta = \theta_B - \theta_p$,

$$(3,7)\quad \begin{cases} \Delta x = X_p - X_B \\ \Delta t = t_B - t_p \end{cases}$$

et en désignant, par ΔR la rémanance, c'est-à-dire la différence entre la distance horizontale X_0 où se trouverait l'avion qui a lancé la bombe, après un temps t_B égal à la durée de la chute, et X_B, on pourra metttre également:

$$(3,7)\qquad \Delta R = \Delta x + \Delta t . V_0 \cos\theta_0 .$$

Les relations précédentes donnent facilement:

$$(3,8)\quad \begin{cases} \dfrac{g\, tg\theta_p\, \Delta x}{(V_0\cos\theta_0)^2} = \dfrac{1}{2}(tg\theta_p - tg\theta_0)^2 - \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_p} \frac{tg\theta_p - tg\theta}{(1+I)^{\frac{2}{2-n}}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\ \dfrac{g\, tg\theta_p\, \Delta t}{V_0\cos\theta_0\,(I+I_p)^{\frac{1}{2-n}}} = -(tg\theta_p - tg\theta_0)\left[\dfrac{tg\theta_p}{(1+I)^{\frac{1}{2-n}}} - \dfrac{1}{2}(tg\theta_p + tg\theta_0)\right] \\ \quad + \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_p} \left[\frac{tg\theta_p}{(1+I_p)^{\frac{1}{2-n}}} - \frac{tg\theta}{(1+I)^{\frac{1}{2-n}}}\right] \frac{1}{(1+I)^{\frac{1}{2-n}}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\ \dfrac{g\, tg\theta_p\, \Delta R}{(V_0\cos\theta_0)^2 (1+I_p)^{\frac{1}{2-n}}} = \dfrac{1}{2}(tg^2\theta_p - tg^2\theta_0)\left(1 - \dfrac{1}{(1+I_p)^{\frac{1}{2-n}}}\right) + \\ \quad + \dfrac{tg\theta_p}{(1+I_p)^{\frac{1}{2-n}}} \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_p} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+I)^{\frac{1}{2-n}}}\right) \frac{1}{(1+I)^{\frac{1}{2-n}}} \frac{d\theta}{\cos^2\theta} - \\ \quad - \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_p} \frac{tg\theta}{(1+I)^{\frac{2}{2-n}}} \left[\frac{1}{(1+I_p)^{\frac{1}{2-n}}}\right] \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\ \dfrac{\sin\theta_p}{\cos^3\theta_p} \dfrac{\Delta\theta}{(1+I_p)^{\frac{2}{2-n}}} = \dfrac{gh}{(V_0\cos\theta_0)^2} - \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_p} \frac{1}{(1+I)^{\frac{2}{2-n}}} \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}\, d\theta. \end{cases}$$

4. *Transformation et simplification des expressions.*

Les relations précédentes de Δx, Δt et ΔR contiennent des intégrales très difficile à résoudre à cause du terme $(1 + I)^m$ placé sous le signe de l'intégrale.

Aussi, en remarquant que la valeur de I, sur tout l'intervalle $\theta_0 - \theta^p$ de l'intégration est assez petite, on peut remplacer les expressions $(1 + I)^m$ par des valeurs approchées:

$$(4,1)\quad \begin{cases} (1+I)^{\pm\frac{1}{2-n}} = 1 \pm \dfrac{I}{2-n} & (1+I)^{\pm\frac{1}{2-n}} = 1 \pm \dfrac{I}{2-n} \\ (1+I)^{-\frac{2}{2-n}} = 1 - \dfrac{2I}{2-n} & (1+I)^{\pm\frac{2}{2-n}} = 1 \pm \dfrac{2I}{2-n} \end{cases}$$

et les relations précédentes (3,8) deviennent:

$$(4,2)\quad \begin{cases} \Delta x = \dfrac{2(V_0\cos\theta_0)^2}{(2-n)\,g\,tg\,\theta_p} \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_p} \frac{I\,(tg\,\theta_p - tg\,\theta)}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ \Delta t = \dfrac{V_0\cos\theta_0}{(2-n)\,g\,tg\,\theta_p} \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_p} \frac{I\,(2\,tg\,\theta - tg\,\theta_p)}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ \Delta R = \dfrac{(V_0\cos\theta_0)^2}{(2-n)\,g} \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_p} \frac{I}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ \Delta\theta = \dfrac{2}{2-n}\left(1 + \dfrac{2I}{n-2}\right) \dfrac{\cos^2\theta_p}{tg\,\theta_p} \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_p} \frac{I\sin\theta}{\cos^3\theta}\,d\theta. \end{cases}$$

Ou encore, en intégrant par parties:

$$(4,3)\quad \begin{cases} \Delta x = \dfrac{(V_0\cos\theta_0)^2}{(2-n)\,g\,tg\,\theta_p} \cdot \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_p} (tg\,\theta_p - tg\,\theta)^2\,dI \\ \Delta t = \dfrac{V_0\cos\theta_0}{4(2-n)\,g\,tg\,\theta_p} I_p\,tg^2\theta_p - \dfrac{V_0\cos\theta_0}{4(2-n)\,g\,tg\,\theta_p} \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_p} (2tg\,\theta - tg\,\theta_p)^2\,dI \\ \Delta R = \dfrac{(V_0\cos\theta_0)^2}{(2-n)\,g}\,tg\,\theta_p\,I_p - \dfrac{(V_0\cos\theta_0)^2}{(2-n)\,g} \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_p} tg\,\theta\,dI \\ \Delta\theta = \dfrac{I_p}{2-n}\,\dfrac{tg\,\theta_p}{1} - \dfrac{1 + \dfrac{2I_p}{2-n}}{2-n}\cos^2\theta_p \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_p} \frac{dI}{\cos^2\theta} \end{cases}$$

Plus loin, en remplaçant dI par sa valeur, on a finalement:

$$(4,4)\quad \begin{cases} \Delta x = \dfrac{(V_0 \cos\theta_0)^{4-n} K}{g\, tg\,\theta_p} \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_p} \zeta \cos^n \theta\, (tg\,\theta_p - tg\,\theta)^2 \dfrac{d\theta}{\cos^3\theta} \\ \Delta t = \dfrac{(V_0 \cos\theta_0)^{3-n} K}{g\, tg\,\theta_p} \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_p} \zeta \cos^n \theta\, (tg\,\theta_p - tg\,\theta)\, tg\,\theta \dfrac{d\theta}{\cos^3\theta} \\ \Delta R = \dfrac{(V_0 \cos\theta_0)^{4-n} K}{g} \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_p} \zeta \cos^n \theta\, (tg\,\theta_p - tg\,\theta) \dfrac{d\theta}{\cos^3\theta} \\ \Delta\theta = \dfrac{I_p}{2-n} \dfrac{I}{tg\,\theta_p} - \left(I + \dfrac{2\,I_p}{2-n}\right) \dfrac{\cos^2\theta_p}{tg\,\theta_p} (V_0 \cos\theta_0)^{2-n} K \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta_p} \zeta \cos^n \theta \dfrac{d\theta}{\cos^5\theta} \end{cases}$$

Ces formules, d'une forme assez simple, ont été obtenues grâce à l'hypothèse faite plus haut sur les valeurs de l'intégrale I le long de l'intervalle d'intégration $(\theta_0 - \theta_p)$.

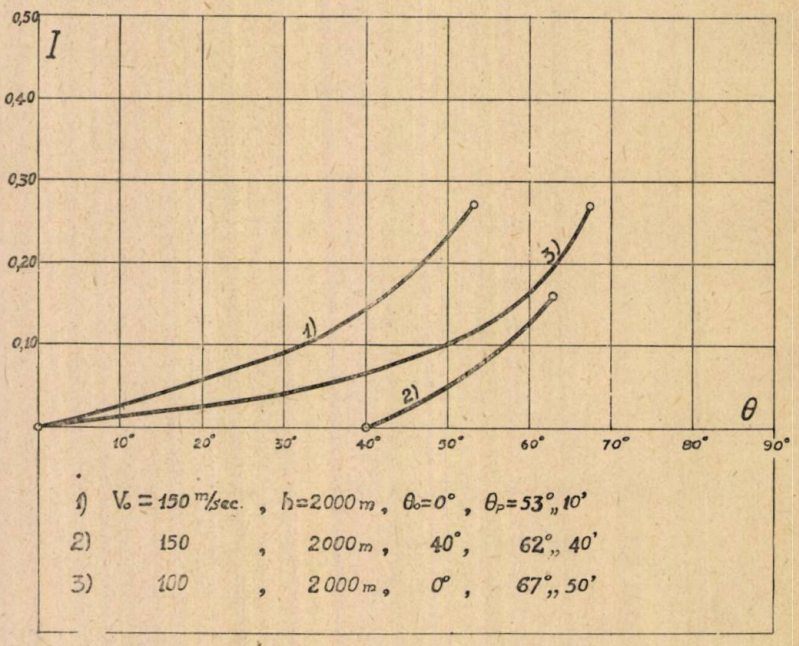


Fig. 2.

Pour justifier cette hypothèse, nous avons représenté (fig. 2), la variation de I le long de l'intervalle $\theta_0 - \theta_p$, et les diagrammes ainsi obtenus, pour des cas assez défavorables cependant, nous indiquent clairement que les valeurs de l'expression I sont petites et les relations (4,1) sont parfaitement admissibles.

Les intégrales des expressions (4,4), quoique de forme assez simple, ne sont pas moins difficiles à résoudre, à cause des termes $\cos^n$ et ζ.

Étant donné que le nombre n a une valeur très voisine de 0,20, on peut remplacer $\cos^n \theta$ par une expression approchée en $\cos\theta$:

$$(4,5) \qquad \cos^n \theta = 1 - \frac{3n}{2} + 2n \cos\theta - \frac{n}{2} \cos^2\theta$$

qui représente assez bien les valeurs de $\cos^n \theta$ dans tout l'intervalle d'intégration.

Quant à ζ, exprimée en fonction de Z dans (1,11), pourrait être transformée en fonction de θ, comme il suit:

En effet, on peut admettre, en première approximation (puisqu'il s'agit d'une correction) que z varie en fonction de θ comme pour la trajectoire parabolique, qui ne diffère pas sensiblement de celle réelle. Dans ce cas, z est très facile à déterminer en fonction de θ:

$$(4,6) \qquad z = h + \frac{(V_0 \sin\theta_0)^2}{2g} - \frac{(V_0 \cos\theta_0)^2}{2g} tg^2\theta$$

ce qui nous permet d'écrire pour

$$(4,7) \qquad \zeta = 1 - ez = p + qtg^2\theta$$

avec

$$(4,8) \qquad \begin{cases} p = 1 - e\left(h + \dfrac{(V_0 \sin\theta_0)^2}{2g}\right) \\ q = e\dfrac{(V_0 \cos\theta_0)^2}{2g}. \end{cases}$$

Ainsi donc, en remplaçant dans les expressions (4,4), $\cos^n \theta$ et ζ par leurs valeurs tirées de (4,5) et (4,7), on obtient de nouvelles expressions qu'il est facile d'intégrer.

5. *Solutions finales.*

Avec les considérations du paragraphe précédent, en effectuant les intégrales des expressions (4,4), et en mettant d'autre part:

$$(5,1) \qquad u(\theta) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} + \log tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right]$$

et

$$(5,2) \qquad (u_p = u(\theta_p) \quad , \quad u_0 = u(\theta_0)$$

nous obtenons les formules suivantes qui sont susceptibles d'applications immédiates:

(5,3)

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{g\,tg\theta_p\,\Delta x}{V_0\cos\theta_0)^{4-n}\,K} = (u_p - u_0)\left[\left(p - \dfrac{q}{4} - \dfrac{n}{8}(20p - 7q)\right)tg^2\theta_p - \dfrac{d}{4} + \ldots\right] \\
+ \ldots\left(\dfrac{\sin\theta_p}{\cos^6\theta_p} - \dfrac{\sin\theta_0}{\cos^6\theta_0}\right) + \dfrac{1}{4}(\ldots tg^2\theta_p + \ldots)\left(\dfrac{\sin\theta_p}{\cos^4\theta_p} - \dfrac{\sin\theta_0}{\cos^4\theta_0}\right) + \\
+ \dfrac{n}{2}(p-q)(tg^2\theta_p - 1)\left(\dfrac{\sin\theta_p}{\cos^2\theta_p} - \dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta_p}\right) - \ldots tg\theta_p\left(\dfrac{1}{\cos^5\theta_p} - \dfrac{1}{\cos^5\theta_0}\right) \\
+ \dfrac{2}{3}(\ldots)\,tg\theta_p\left(\dfrac{1}{\cos^3\theta_p} - \dfrac{1}{\cos^3\theta_0}\right) + n(p-q)\,tg\theta_p\left(\dfrac{1}{\cos\theta_p} - \dfrac{1}{\cos\theta_0}\right) + \\
+ \ldots\left[\dfrac{tg^3\theta_p}{\ldots} - tg\theta_0(3\,tg^2\theta_p - 3\,tg\theta_p\,tg\theta_0 + tg^2\theta_0)\right] + \\
+ \ldots[tg^5\theta_p - tg^3\theta_0(10\,tg^2\theta_p - 15\,tg\theta_p.tg\theta_0 + 6\,tg^2\theta_0)] \\
\dfrac{g\,tg\theta_p\,\Delta t}{(V_0\cos\theta_0)^{3-n}\,K} = (u_p - u_0)(-\ldots) - \ldots\left(\dfrac{\sin\theta_p}{\cos^6\theta_p} - \dfrac{\sin\theta_0}{\cos^3\theta_0}\right) + \\
+ (\ldots)\left(\dfrac{\sin\theta_p}{\cos^4\theta_p} - \dfrac{\sin\theta_0}{\cos^4\theta_0}\right) + \dfrac{n}{2}(p-q)\left(\dfrac{\sin\theta_p}{\cos^2\theta_p} - \dfrac{\sin\theta_0}{\cos^2\theta_0}\right) + \\
+ \ldots tg\theta_p\left(\dfrac{1}{\cos^5\theta_p} - \dfrac{1}{\cos^5\theta_0}\right) + \dfrac{\cdots\cdots}{3}\,tg\theta_p\left(\dfrac{1}{\cos^3\theta_p} - \dfrac{1}{\cos^3\theta_0}\right) - \\
- \dfrac{n}{2}(p-q)\,tg\theta_p\left(\dfrac{1}{\cos\theta_p} - \dfrac{1}{\cos\theta_0}\right) + \dfrac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}[tg^3\theta_p - tg^2\theta_0(3tg\theta_p - 2tg\theta_0)] + \\
+ \dfrac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}[tg^5\theta_p - tg^4\theta_0(5tg\theta_p - 4\,tg\theta_0)] \\
\dfrac{g\,\Delta R}{(V_0\cos\theta_0)^{4-n}\,K} = (u_p - u_0)\,tg\theta_p(\ldots) + \dfrac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}\,tg\theta_p\left(\dfrac{\sin\theta_p}{\cos^4\theta_p} - \dfrac{\sin\theta_0}{\cos^4\theta_0}\right) + \\
+ \dfrac{n}{2}(p-q)\,tg\theta_p\left(\dfrac{\sin\theta_p}{\cos^2\theta_p} - \dfrac{\sin\theta_0}{\cos^2\theta_0}\right) - \dfrac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}\left(\dfrac{1}{\cos^5\theta_p} - \dfrac{1}{\cos^5\theta_0}\right) \\
+ \dfrac{\cdots\cdots}{3}\left(\dfrac{1}{\cos^3\theta_p} - \dfrac{1}{\cos^3\theta_0}\right) + \dfrac{n}{2}(p-q)\left(\dfrac{1}{\cos\theta_p} - \dfrac{1}{\cos\theta_0}\right) + \\
+ \dfrac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}(tg\theta_p - tg\theta_0)^2 + \dfrac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}[tg^4\theta_p - tg^3\theta_0(4\,tg\theta_p - 3\,tg\theta_0) \\
\Delta\theta = \dfrac{I_p}{2-n}\,\dfrac{1}{tg\theta_p} - \left(1 + \dfrac{2\,I_p}{2-n}\right)\dfrac{\cos^2\theta_p}{tg\theta_p}\,(V_0\cos\theta_0)^{2-n}\,K \\
\left\{u\left[\dfrac{3}{4}p\left(1 - \dfrac{3n}{2}\right) - \dfrac{n}{2}p - \dfrac{1}{8}q\left(1 - \dfrac{3n}{2}\right) + \dfrac{n}{8}q\right] + \dfrac{q}{6}\left(1 - \dfrac{3n}{2}\right)\dfrac{\sin\theta}{\cos^6\theta}\right. \\
+ \left[\dfrac{p}{4}\left(1 - \dfrac{3n}{2}\right) - \dfrac{q}{24}\left(1 - \dfrac{3n}{2}\right) - \dfrac{q}{8}n\right]\dfrac{\sin\theta}{\cos^4\theta} + \dfrac{2n}{5}q\,tg^5\theta + \\
\left. + \dfrac{2nq + 2np}{3}\,tg^3\theta + 2np\,tg\theta\right\}_\theta^{\theta_p}.
\end{array}\right.$$

On peut apporter *une première simplification* des formules précédentes en remarquant que l'expression

$$\zeta = 1 - ez = 1 - 0{,}000080\, z$$

a une petite variation en fonction de z pour les altitudes usuelles de bombardement, de sorte qu'on peut remplacer ζ par une valeur moyenne:

$$\zeta m = 1 - e\frac{h}{2} = 1 - 0{,}000040\, h, \tag{5,4}$$

On peut, de même, introduire *une seconde simplification*, si on remarque que la valeur de $\cos^n \theta$, même pour les cas les plus défavorables, varie très lentement en fonction de θ, de manière qu'il y a lieu à remplacer $\cos^n \theta$ par une valeur moyenne:

$$(\cos^n \theta)_m = \frac{\cos^n \theta_0 + \cos^n \theta_p}{2}. \tag{5,5}$$

En introduisant ces valeurs moyennes dans les formules précédentes, celles-ci prennent une forme très simple:

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{g\, tg\theta_p \Delta x}{(V_0 \cos\theta_0)^{4-n}\left(1 - e\dfrac{h}{2}\right)\cdot\dfrac{\cos^n \theta_0 + \cos^n \theta_p}{2} K} = (u_p - u_0)\left((tg^2\theta_p - \dfrac{1}{4}\right) + \\
\quad + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\sin\theta_p}{\cos^4\theta_p} - \dfrac{\sin\theta_0}{\cos^4\theta_0}\right) - \dfrac{2}{3}\, tg\theta_p\left(\dfrac{1}{\cos^3\theta_p} - \dfrac{1}{\cos^3\theta_0}\right) \\
\dfrac{g\, tg\theta_p \Delta t}{(V_0 \cos\theta_0)^{3-n}\left(1 - e\dfrac{h}{2}\right)\dfrac{\cos^n \theta_0 + \cos^n \theta_p}{2} K} = \\
\quad = \dfrac{1}{4}(u_p - u_0) - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\sin\theta_p}{\cos^4\theta_p} - \dfrac{\sin\theta_0}{\cos^4\theta_0}\right) + \dfrac{1}{3}\, tg\theta_p\left(\dfrac{1}{\cos^3\theta_p} - \dfrac{1}{\cos^3\theta_0}\right) \\
\dfrac{g\Delta R}{(V_0 \cos\theta_0)^{4-n}\left(1 - e\dfrac{h}{2}\right)\dfrac{\cos^n \theta_0 + \cos^n \theta_p}{2} K} = \\
\quad = (u_p - u_0)\, tg\, \theta_p - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{\cos^3\theta_p} - \dfrac{1}{\cos^3\theta_0}\right) \\
\Delta\theta = \dfrac{I_p}{2-n}\dfrac{1}{tg\theta_p} - \dfrac{1}{4}\left(1 + \dfrac{2I_p}{2-n}\right)\dfrac{\cos^2\theta_p}{tg\theta_p}(V_0 \cos\theta_0)^{2-n} K\left(1 - \dfrac{eh}{2}\right) \\
\quad \left(\dfrac{\cos^4 \theta_0 + \cos^n \theta_p}{2}\right)\left[3(u_p - u_0) + \dfrac{tg\theta_p}{\cos^3 \theta_p} - \dfrac{tg\theta_0}{\cos^3\theta_0}\right].
\end{array}\right. \tag{5,6}$$

6. *Établissement des tables et diagrammes de tir.*

Ainsi que nous l'avons dit au commencement, le bombardement aérien utilise les caractéristiques finales de la trajectoire (fig. 1): *la portée* $X_B = X_p - \Delta x$, *l'angle de visée* φ ou $tg\,\varphi = \frac{X}{h}$, *le temps de chute* $t_B = t_p + \Delta t$, *la rémanence* ΔR, etc. Ces caractéristiques sont déterminées en fonction des *paramètres du tir*: l'altitude h, vitesse V_0 de l'avion et l'angle θ_0.

En prenant pour h, V_0 et θ_0 des valeurs déterminées couramment utilisées en aviation, on détermine les caractéristiques correspondantes finales cherchées, et on établit ainsi les *tables de tir.*

D'après les expressions précédentes, on constate cependant, qu'à la place de h, les formules contiennent des fonction de θ_p, liées à h par la première des relations (3,1) déduite de la trajectoire parabolique, qu'on va utiliser constamment pour déterminer $tg\theta_p$, $\sin\theta_p$, $\cos\theta_p$, etc.

Pour déterminer X_p, la portée de la trajectoire parabolique, ainsi que le temps tp, on utilise les mêmes relations (3,1), seconde et troisième.

Si les conditions initiales h, V_0, θ_0 sont identiques pour les différents types de bombes, les trajectoires ne diffèrent que du terme K, dont la valeur est donnée par l'expression indiquée dans le premier paragraphe:

$$(1,7) \qquad K = \frac{\rho_0}{2}\,\frac{S}{G}\,V_m^n \cdot \left(\frac{D_m}{D}\right)^n Cx.$$

Il est souvent très important que les *tables de tir soient identiques* pour toutes les bombes employées. Aussi, est-on amené à réaliser des bombes dont le coefficient *K soit constant pour tous les types et grandeurs.*

Cette condition est représentée par la relation suivante:

$$(6,1) \qquad \frac{D^{2-n}}{G}(D_m \,.\, V_m)^n \,.\, Cx = C^t$$

qui est très facile à satisfaire. Même si quelque fois on est obligé de changer la forme du projectile, la formule (6,1) nous donne la condition à remplir pour utiliser les mêmes tables de tir.

7. *Vérification des résultats.*

Pour vérifier les résultats obtenus, il serait nécessaire d'exécuter une série d'essais, très nombreux d'ailleurs, en lançant des bombes dont les caractéristiques aérodynamiques soient bien connues.

Cette méthode directe est cependant très laborieuse; aussi avons-nous calculé les portées et temps de chute d'une bombe utilisée quelque part dans le bombardement réel, dont le coefficient de résistence Cx,

a été au préalable détermine en Soufflerie Aérodynamique, sur un modèle réduit. La vitesse des essais et l'échelle de la maquette ont été respectivement $v_m = 39$ m/sec et $\frac{D_m}{D} = \frac{1}{3,7}$ et la résistance obtenue, $Cx = 0,324$. Il en est résulté pour K, d'après la relation (1,7) la valeur $K = 0,000015$, qu'on a introduite dans lexpressions (5,6) pour le calcul de Δx.

En comparant les résultats de ces calculs avec ceux *des tables de tir* exactes, établies d'une manière rigoureuse et corrigées par une longue série d'essais exécutés sur le même type de bombe on constate un accord très satisfaisant qui nous permet de conclure, qui les formules que nous avons établies plus haut peuvent être appliquées en toute rigueur.

BEITRÄGE ZUM KENNTNIS DER SULFONSÄUREN AUS GASÖL

von **Vasile Th. Cerchez**

Die Sulfonsäuren, die man aus den verschiedenen Erdölfraktionen erhält, sind wenig bekannte Produkte. Dieses besonders was die Säuren betrifft, die man aus den höheren Fraktionen erhält, weil die Sulfonierung der niederen Fraktionen, wie es zum Beispielt Benzine sind, wurde schon öfters durchgeführt bei der Separation und Identifizierung der aromatischen Kohlenwasserstoffe.

Bedeutende Arbeiten auf dem Gebiete der Sulfonsäuren aus den schweren Fraktionen wurden von S. PILAT und seinen Mitarbeiter (1), im Laboratorium für Erdölforschung der Politechn. Hochschule von Lwow durchgeführt.

Um eine Ordnung in dieses noch wenig bekannte Gebiet hineinzubringen, wurden die Sulfonsäuren in 2 grosse Kategorien eingeteilt, und zwar: Säuren löslich in den Destillaten, und Säuren löslich in den säuren Teeren. Andererseits stellten Pilat und seine Mitarbeiter eine Klasifikation der Sulfonsäuren auf Grund der verschiedenen Löslichkeit des Kalziumsalzes in Wasser und Äthyläther auf, sowie auf Grund der verschiedenen Färbungen die die Äterlösungen der Eisensalze geben. PILAT unterscheidet:

Säuren der Gruppe α, deren Kalziumsalze unlöslich in Äthyläther sind Ihre Eisensalze sind ebenfalls unlöslich in Äther.

Die Säuren der Gruppe β, deren Kalziumsalze unlöslich in Wasser aber löslich in Ather sind. Die Eisensalze sind löslich in Äther und weisen eine starkblaue Färbung auf.

Die Säuren der Gruppe γ, deren Kalziumsalze löslich im Wasser aber unlöslich in Äther sind. Die Eisensalze sind unlöslich in Äther.

Die Säuren der Gruppe δ deren Kalziumsalze unlöslich in Wasser aber löslich in Äther sind. Die Eisensalze sind löslich in Äther und geben eine gelbe Färbung.

Im Folgenden wird über die ersten Ergebnisse berichtet, die wir beim Studium der löslichen Sulfonsäuren aus dem Distilat eines asphaltösen Gas öls erhielten.

Das Motorin das sulfoniert wurde, hatte folgende Eigenschaften:

Dichte bei 15°	0.906
Entflammungspunkt	98°
Erstarrungspunkt	—20° C
Verunreinigungen beim zentrifugieren .	0.01%
Engler Distillation:	
Anfang 236° C	
Bis zu 300° C distilliert	46%
» » 350° C »	90%
» » 360° C »	93%

HERSTELLUNG DER SULFONSÄUREN

Die Sulfonsäuren die untersucht wurden sind auf folgende Weise hergestellt worden.

Gasöl wird mit 5% Oleum, das 20% SO_3 enthält, behandelt. Das Gemisch wurde mit einem vorher getrockneten Luftstrom durchschüttelt. Die Arbeitstemperatur liegt bei 90° C. Dieser Vorgang dauerte ungefähr 3 Stunden. Nach 4 Stunden wurde die Flüssigkeit in ein anderes Gefäss übergeführt und nach einem weiteren Stillstand von einer Stunde wurde dieser Vorgang nochmals wiederholt. Diese Arbeitsweise bezweckt die Entfernung der Teere die an den Wänden des Gefässes haften bleiben. Es wird nun durch die Flüssigkeit in ein getrockneter Luftstrom geleitet um das anwesende Schwefeldionid zu entfernen, wobei die Temperatur des Gasöls zwischen 70—80° C liegt. Um den Rest der Teere zu entfernen wurde das Gasöl 1 Stunde stehen gelassen um dann die Sulfonsäuren mit einer wässerigen Lösung von Äthylalkohol (ein Teil Äthylalkohol und zwei Teile Wasser) zu extrahieren. Die alkoholische Lösung für die Extraktion belief sich auf 3%. Es scheint, dass eine einzige Extraktion genügt um sämtliche Sulfonsäuren zu extrahieren. Tatsächlich blieb nach einer zweiten Extraktion die Alkohollösung klar. Wenn nach der Behandlung mit einer Alkohollösung gasförmiges Ammoniak bis zur Neutralisation eingeleitet wird, erhalt man statt den Sulfonsäuren deren Ammoniumsalze. Im ersten Fall sind die Sulfonsäuren mit Schwefelsäure verunreinigt, die Einfluss auf die Stabilität und die

Farbe der Sulfonsäuren hat, wenn man sie durch Verdampfen des Wassers konzentrieren will.

Die so erhaltenen Sulfonsäuren enthalten immer, als Verunreinigung eine gewisse Menge von Gasöl.

Bei Erwärmung der alkoholischen Lösung der Sulfonsäuren, wird der Alkohol zurückgewonnen. Der Wirkungsgrad der Sulfonierung überschreitet im allgemeinen nicht der Wert von 2—3%. Die auf diese Weise erhaltenen Sulfonsäuren hatten folgende Zusammensetzung:

	Sulfonsäuren %	Ammonium-sulfonate %
Wasser	52	48
Gasöl	9	9
Sulfonsäure derivate . . .	37	40
Asche	1,9	2,6

DIE REINIGUNG DER SULFONSÄUREN

Es wurden verschiedene Versuche zur Reinigung des Sulfonsäuren durchgeführt, besonders wurde darnach getrachtet, sie Wasser und gasölfrei zu erhalten.

In der Literatur wird eine grosse Anzahl von Methoden vorgeschlagen um die Sulfonsäuren rein zu erhalten. Eine Anzahl von ihnen die einfach und zweckdienlich erschienen wurden angewendet.

Die Methode durch Aussalzen (2) wurde durchgeführt, mit der Hoffnung, dass sie zu einem befriedigenden Resultat führen werde.

Zu 20 gr Ammoniumsulfonat mit einem Wassergehalt von 50% wurden 3,5 gr Natriumchlorid stufenweise hinzugegeben. Am Ende dieses Vorgangs, haben die Sulfonsäuren das Aussehen einer gelatinösen Masse. Nach einer heftigen Durchschüttelung des Scheidetrichters in dem diese Operation durchgeführt wurde, ballte sich die Sulfonsäure in Form eines gelatinösen Klumpens zusammen, wobei das abgeschiedene Wasser vollständig klar blieb. Nach dieser Abscheidung wurde das Wasser der gereinigten Sulfonsäure mittels Benzin durch Mitreissen des Wasserdampfes bestimmt. Der Wasser gehalt betrag 20%. Ausser Wasser wird durch diese Arbeitsweise auch ein Teil des Gasöl entfernt. Die durch Aussalzen erhaltene Substanz wurde ebenfalls analysiert in Bezug auf die Asche, um einen Anhaltspunkt über die Salzmenge zu haben, die von der Asche zurückgehalten wird. Es konnte festgestellt werden dass anfänglich der Aschengehalt der Sulfonsäuren 26% betrug, während nach dieser Reinigung der prozentuelle Aschengehalt auf

12,5% anstieg. Auf Kosten der teilweisen Entfernung des Wassers stieg der Aschengehalt in beträchtlichem Menge.

Eine andere Reinigungsmethode wurde von Petrov (3) angegeben. Dieser Autor behandelt alkoholische oder wässerige Lösungen der Sulfonate mit Sägespänen und nach der Trocknung extrahiert er die Sulfonsäuren mit wässerigen Alkohol. Die Verunreinigungen werden auf diese Weise von den Sägespänen zurückgehalten.

Um diese Methode anzuwenden wurden 50% gr Ammoniumsulfonate mit einem Wassergehalt von 50% innig mit Sägespänen gemischt. Mehrere Tage wurde das Gemisch stehen gelassen um zu trocknen. Die so erhaltene Masse wurde mit Alkohol 50% extrahiert. Nach der Destillation erhielt man Sulfonate die 15% Wasser, 3% Gasöl und 2,0% Asche enthielten.

Es wird daher festgestellt, dass durch diese Methode eine bedeutende Verminderung des Prozentgehaltes an Wasser und Gasöl erreicht wird. Der grosse Nachteil dieses Verfahrens beruht auf der Extraktion mit Alkohol.

Versuche mit verschiedenen andern Reinigungsverfahren führten leider nicht zu befriedigerenden Resultaten.

Was die Entfernung der verschiedenen Verunreinigungen der Sulfonsäuren anbetrifft müssen folgende Überlegungen angestellt werden. Im allgemeinen können anorganische Verunreinigungen — die wasserlöslichen Salzepraktisch unmöglich entfernt werden. Die chemischen Methoden sind nicht empfehlenswert, weil die Einführung eines Reaktionsmittels die Substanz noch mehr verunreinigt. Diese Verunreinigungen und jedoch in verhältnismässig kleinem Masse anwesend.

Die Versuche die unternommen wurden bezweckten im besonderen die Entfernung des Wasser und des Gasöls. Für die Entfernung des Gasöls wendete ich die von Holzmann angegebene und von Fussteig beschriebene Methode an. Zu diesem Zwecke wurden in einem Scheidetrichter von 100 ccm 20 gr Ammoniumsulfonat mit 50% Wassergehalt eingewogen. Nach mehreren Versuchen stellte ich fest, dass wenn man zu den Ammoniumsulfonaten noch 10 ccm Wasser hinzu fügt, scheidet sich der zur Extraktion verwendete neutrale Äther viel leichter ab. Nach 5 Min. schnitteln trennen sich die beiden Schichten gut. Die wässerige Sulfonatlösung wird hierauf in einen anderen Scheidetrichter übergeführt und die Extraktion mit je 10 ccm Äther zehnmal widerholt. Nach der letzten Extraktion, wird die Ätherschicht die vorher gelb gefärbt, war vollständig farblos, das beweist, das sie nicht mehr in Lösung enthält. Die ätherischen Extrakte wurden gesammelt und der Äther abdestilliert Nach der vollständigen Entfernung des Lösungs-

mittels, blieben 1,8 gr Gasöl von hellgelber Farbe. Das Ausgangsprodukt enthielt demnach 9% Gasöl. Durch diese Methode wird das in den Ammoniumsulfonaten enthaltene Gasöl vollständig abgeschieden, dagegen ist nach der Behandlung der Wassergehalt grösser, da wie oben angeführt wurden.

Zur Erleichter der Trennung der beiden Schichten eine Zugabe von Wasser zu den Sulfonaten nötig ist.

Zur Entfernung des Wassers, ohne die Eigenschaften des Gasöl zu ändern, wurde nach einer von V. Cerchez u. V. Niculescu (5) beschriebenen Methode gearbeitet die das Entfernen des Wassers aus Erdölemulsionen behandelt durch einleiten eines luftstromes durch das erwärmte Produkt.

Zu diesem Zweck wurden durch 200 gr Ammoniumsulfonate mit 50% Wasser die sich in einem 1l Berselius-Becher befanden, trockene Luft durchgeleitet. Während des Durchleitens der Luft wurde das Produkt auf ungefähr 80° C erwärmt. Nach 1½ ständigen Durchleiten der Luft geht der anfängliche Wassergehalt von 50% auf 20% zurück während er nach 2 Stunden nur noch 19% beträgt. Ich habe festgestellt, dass im Laufe dieser Operationen zu einem gegebenen Zeitpunkt reichlich Schaum entsteht. Das Auftreten des Schaumes scheint mit der Erreichnung eines Wassergehaltes von 19% verbunden zu sein. Anfänglich glaubte ich, dass diese Schaum die Folge einer Zersetzung der Ammoniumsulfonate sei, eingehenderes Studium bewies dass diese Mutmassung nicht begründet war.

Beim Auftreten der Schaumes wurde die Temperatur von 80° C auf 60° C vermindert, wobei die Luftmenge verkleinert und das Luftzuleitungsrohr aus Glas heftig bewegt wurde. Dieses Situation hielt ungefähr 3/4 Stunden an, nachdem der Schaum anfing zu sinken obwohl der Luftstrom energischer wurde und die Temperatur von neuem erhöht wurde. Das Produkt war unter diesen Bedingungen kleiner Veränderung unterworfen und nach 3½ Stunden enthielt es nur noch 3% Wasser.

Die letzten Prozente Wasser wurden im Trockenschrank entfernt. Die auf diese Weise gereinigten Sulfonate hatten das Aussehen einer festen Masse mit hellbrauner Farbe. In pulverform stellten die Sulfonate eine gelbbraune Masse dar. Die getrockneten Sulfonate sind sehr hygroskopisch. An der Luft verwandeln sie sich in ein hellbraunes Produkt. Sie können unverändert in einer Flasche mit eingeschliffenen Stopfen aufbewahrt werden.

Dieselbe Methode wurde auch im Falle einiger Sulfonsäuren angewendet die vorher vom Gasöl, das sie enthielten gereinigt wurden.

Die Sulfonsäuren können auch Naphtensäuren enthalten. Zur Bestimmung dieser wurde folgende von PILAT und SEREDA angegebene Methode benützt. 20 gr Sulfonsäuren werden eingewogen u. nach einer Zugabe von 10 ccm Wasser werden 10 Extraktionen mit Schwefelsäureäther zur Entfernung des Gasöls gemacht. Die wässerige Lösung wird dann mit einer konzentrierten Kochsalzlösung behandelt. Unter diesen Bedingengen bildet sich das Natriumsalz der Sulfonsäuren zum Unterschied aller Naphtensäuren die mit einer konzentrierter Natriumchloridelösung keine Reaktion eingehen. Das Natriumsaltz der Sulfonsäuren ist wasserlöslich. Die wässerige Lösung wurde hierauf mit Benzin 80—110° extrahiert um die Sulfonsäuren zu abzuscheiden. Nach der Verdampfung des Benzins, blieb überhaupt kein Rückstand, was die Abwesenheit von Naphtensäuren beweist.

Die Zusammensetzung des gereinigten Produkte ist folgende:

	%
Ammoniumsulfonate	98
Wasser	0
Gasöl	0
Naphtensäuren	0
Asche	2,6

Ein anderer Versuch, der sich auf die von mir untersuchten Sulfonsäuren erstreckte, war die Bestimmung der in ihnen enthaltenen α b γ δ Derivate nach der von PILAT, SEREDA und SZNAKOWSKI (7) angegebenen Methode.

Um diese Separation durchzuführen, wurden 40 gr von Gasöl gereinigtes Ammoniumsulfonat, das 25% Wasser enthielt, mit Kalkmilch zusammengebracht, was zu einem Niederschlag führte, der Niederschlag wurde dann filtriert und mit kaltem Wasser gewaschen. Von neuem wird und Kalkmilch hinzugefügt und durch Erwärmung wird festgestellt, ob noch Ammoniak entweicht, dann das Waschen wiederholt. Wenn nach einem neuen Hinzufügen kein Ammoniakgeruch mehr festgestellt wird, kann der Vorgang als beendet betrachtet werden, wobei dann das Calciumsalz der Sulfonsäuren in Form einer klebrigen Masse erhalten wird. Nach einer mit Sorgfältigen Waschung wurde das Calciumsulfonat, einer Ätherextraktion unterworfen, um den in diesem Lösungsmittel unterlöslichen Teil zu abzuscheiden.

Die Calciumsulfonate, die nach der Extraktion bleiben, sind jene deren Calciumsalze unlöslich in Wasser und Äther sind. Nach der Trocknung im Trockenschrank wurden sie gewogen und man erhielt 13,5 gr das sind also 45% α-Sulfonate.

Nach diesem Ergebnis geurteilt, scheint es, dass fast die Hälfte der Sulfonsäuren die untersucht wurden der Gruppe α angehören. Diese Sulfonate haben das Aussehen einer weissen Masse. Die Farbe ändert sich nicht, wenn die Sulfonate unter Wasser aufbewahrt werden. Am der Luft werden sie gelb.

Die ätherischen Extrakte, die von der Extraktion der Sulfonate herrührten wurden verdampft. Nach der umvollständigen Entfernung des Äthers, blieb eine gelatinöse Masse zurück, sehr klebrig, die auf einer Glasplatte ausgebreitet, eine durchsichtige Schicht gab und unlöslich in Wasser ähnlich einem Lack war. Das Produkt besteht aus δ-Sulfonaten denn obwohl die Kalziumsalze unlöslich in Wasser und löslich in Äther und wie die Sulfonate geben sie aber zum Unterschied von diesen sie keine positive Reaktion mit den dreiwertigen Eisen Salzen, nach der vollständigen Entfernung des Äthers erhält man 7,6 gr das sind

25% δ-Sulfonate.

Die nach der Fällung der in Wasser unlöslichen der Calciumsulfonate gebliebene Lösung wurde zur Abscheidung der in Wasser löslichen aber in Äther unlöslichen Calciumsulfonate verwendet. Durch verdampfen der wässerigen Lösung wurden die in Wasser löslichen aber in Äther unlöslichen Calciumsalze erhalten. Nach der Trocknung erhielt man 8,9 gr was

30% Sulfonate darstellt.

Zusammenfassend enthielt das untersuchte Produkt:

45% α-Sulfonate
25% δ- »
30% γ- »

DIE ZERSETZUNG DER SULFONSÄUREN

Der in dieser Arbeit verfolgte Hauptzweck war die Abscheidung und Identifizierung der Kohlenwasserstoffe an die die Sulfonsäuregruppen gebunden sind.

Um die Abtrennung der Sulfonsäuregruppen durchzuführen, wurde zuerst die von Pilat u. Sereda (8) angegebene Methode benützt, die in der Abtrennung der Sulfonsäurengruppen mit Salzsäure 20% bei Siedehitze in einer Zeit von 1½ Stunden besteht. Diese Methode habe ich bei den von mir untersuchten Sulfonaten angewendet, wobei aber die Dauer der Erwärmung auf 8 Stunden verlängert wurde. Nicht einmal unter diesen Bedingungen konnte ich eine Zersetzung des Produktes feststellen, das selbst bei dieser Behandlung vollständig löslich in Wasser ist.

Pilat und Sereda (9) haben die Anwendung von Phosphorsäure und überhitzten Dämpfen anempohlen. Anfangs untersuchte ich nur den Einfluss der Phosphorsäure von 80%.

In einen 250 ccm Kolben wurden 50 gr gereinigte Sulfonate in Pulverform und 60 ccm Phosphorsäure von 80% zusammensgebracht. Durch den Stopfen der den Kolben verschloss ging ein Kühler und ein Thermometer. Der Kolben wurde zuerst auf 130° C dann auf 200° C erhitzt. Nach 8 Stunden Erwärmung schüttete ich einen Teil der Reaktionsmasse in ein mit Wasser gefülltes Gefäss. Ich stellte fest, dass an der Oberfläche des Wassers sich eine dünne Ölschichte ansammelte, was eine noch wenig fort geschüttene Zersetzung bedeutete. Desgleichen wurde ein intensiver Schwefelwasserstoffgeruch festgestellt.

Die beiden oben beschriebene Zersetzungsversuche zeigten und die späteren Versuche bewiesen vollständig diese Tatsache, — dass zur Abtrennung der Sulfonsäuregruppe nicht ein chemisches Reagens — und zwar eine Säure — sondern lediglich die auf eine bestimmte Temperatur überhitzten Dämpfe beitragen. Daher wurde eine Apparatur geschaffen, in der neben Phosphorsäure überhitzte Dämpfe verwendet werden. Die Apparatur bestand aus folgenden Elementen:

1. Ein Dampferzeuger,
2. Ein Dampfüberhitzer,
3. Ein Kolben mit runden Boden der die Sulfonate enthielt,
4. Ein Kondensationssystem.

Im Kolben wirkte auf 100 gr Sulfonat 100 gr Phosphorsäure ein. Zuerst wurde auf 130° C erhitzt, wobei die übermittlen Dämpfe bei der selben Temperatur durchgeleitet wurden. Die Flussigkeitstemperatur wurde mit Hilfe eines Termometer das fast bis auf den Boden des Kolbens reichte, kontrolliert, nach ungefähr zweistundiger Erhitzung wurde eine Temperatur von 230° C gemessen. In diesem Augenblick fing im Kühler ein öliges Produkte zu kondensieren an. Als die Temperatur 240—250° C erreichte, war die destillierende Ölmenge am grössten. Gleichzeitig wurde auch ein intensiver Schwefelwasserstoffgeruch festgestellt. Bei Beendigung der Öldestillation, ging der Inhalt des Kolbens in den festen Zustand über, sodass ein Durchleiten von Wasserdampf nicht mehr möglich schien, und die Reaktion demnach beendet war. Das durch die Zersetzung der Sulfonate erhaltene Öl wurde in einem Becherglas aufgefangen. Das Öl sammelte sich in Form einer dicken Schicht über dem Wasser an. Der Inhalt des Bechers wurde in einen Scheidetrichter übergeführt. Nach 24 Stunden wurde es geschieden getrocknet und gewogen und hatte 56 gr. Das Öl zeigte einen ausgesprochenen schwefligen Geruch. Die Dichte war kleiner als die des Wassers

zum Unterschied des von PILAT erhaltenen Öl, dessen Dichte grösser war als die des Wassers.

In den ersten Versuchen wurden gereinigte Sulfonate verwendet die nicht mehr Gasöl und Wasser enthielten. Übrigens erscheint die vollständige Entfernnung des Gasöl vor der Abscheidung der Sulfonsäuregruppen als unbedingt notwendig.

Die Methode, die durch Extraktion mit Äther das Gasöl entfernt, ist mit grossen Nachteilen verbunden obwohl sie zu befriedigenden Ergebnissen führt, weil sie eine grosse Menge von Äther verbraucht, und zwar 1 kg Äther auf 100 gr Sulfonate.

In einer anderen Versuchsreihe, wobei die vorher beschriebene Arbeitswerke abgeändert wurde, gelangt es die Sulfonsäuregruppe nur unter dem Einfluss von überhitzten Dampf abzusplaten. Dieses führt nicht nur zu einer Vereinfachung der Abspaltungsapparatur dem ein chemisches Reagenz beseitigt wird, sondern gestaltet auch eine vorhergehende Reinigung der zu untersuchenden Rohsubstanz.

Die nach mehreren Versuchen festgelegte Arbeitsweise war folgende: In einen Destillierkolben wurden 400 gr Rohammoniumsulfonat gebracht und die Flüssigkeit im Kolben auf ungefähr 105° C, erhitzt, wobei gleichzeitig ein auf 140° C überhitzter Wasserdampfstrom 6 Stunden durchgeleitet wurde. Während der ganzen Zeit überschritt die Temperatur nicht 105° C obwohl die Dämpfe die in den Kolben eingeleitet wurden viel, heissen waren. Unter diesen Bedingungen erbitten die Sulfonsäuren keinerlei Veränderungen; weder konnte der charakteristische Schwefelwasserstoffgeruch fest gestellt werden noch gab das Kondenswasser einen Niederschlag mit Bariumchlorid. Gasöl wurde teilweise von den Dämpfen mitgerissen und sammelte sich in Form einer gelb-weissen Schicht auf der Wasseroberfläche an. Das so erhaltene Gasöl wog 15 gr. Nach einer Unterbrechnung wurde diese Operation fortgesetzt, wobei die Temperatur im Kolben auf 115° C, erhöht wurde während diejenige der überhitzten Wasserdämpfe die gleiche von 140° C blieb. Unter diesen Verhältnissen begann sich reichlich Schaum im Kolben zu entwickeln, der wie ich annahm, einer Verminderung des Wassergehaltes unter 19% zuzuschreiben war. Da das Gasöl nur teilweise entfernt wurde, unterbrach ich die Operation und führte in den Destillierkolben Wasser ein. Die Arbeit wurde von neuem aufgenommen aber diesmal erreichte die Temperatur des überhitzten Wasserdampfes 180° C, obwohl sie im Kolben nicht 105° C überschritt. Der Vorgang dauerte auch diesmal mehrere Stunden und nachdem neuerlich reichlich Schaummengen auftraten, kehrte die Flüssigkeit zu ihrem Ausgangszustand zurück, war aber jetzt viel zähflüssiger. Das bis zu diesem Augenblick

erhaltene Gasöl wog 35 gr. Daher wurde praktisch das ganze in den Sulfonaten enthaltene Gasöl durch diese Arbeitsweise entfernt. Jetzt wurde mit der zweiten Phase begonnen und zwar die Abtrennung der Sulfonsäuregruppen. Um zu diesem Ergebnis zu gelangen lies ich die Temperatur im Kolben bis auf 200° C ansteigen. Obwohl eine so hohe Temperatur erreicht wurde, reigten sich noch nicht die Anzeichen einer Sulfonatzersetzung. Ein kaum feststellbarer Schwefelwasserstoffgeruch wurde bemerkt und die im Kühler kondensierten Dampftropfen geben mit Bariumchlorid einen Niederschlag.

Nachdem die Temperatur im Kolben auf 230° C und diejenige des Dampfes ebenfalls auf 230° C erhöht wurde, begann eine heftige Zersetzung der Sulfonate und die Öltropfen, die aus dem Kühler fielen, waren reichlich. Das Öl das abdestillierte wurde von dem Wasser, das gleichzeitig kondenssierte emulsioniert und durch verschiedene Schwefelverbindungen und Elementarschwefel, der durch die Einwirkung des Schwefelwasserstoffs auf Schwefeldioxyd enstand verunreinigt. Aus 500 gr Sulfonaten mit 50% Wasser erhielt ich 110 gr Öl.

Aus diesem Versuch folgt, dass die Zersetzung der Sulfonsäuren auch bei Abwesenheit von Phosphorsäure möglich ist, wobei auf 230° *C überhitzter Wasserdampf genügt.* Andererseit wurde festgestellt, dass die Ammoniumsulfonate stabil bei Temperaturen sind, die unterhalb von 200° C liegen, und dass bei höheren Temperaturen sich Zersetzungen bemerkbar machen.

Vom Wunsche erfüllt, bei der Zersetzung ein Öl zu erhalten, das weder Schwefel noch Schwefelverbindungen enthielt, wurde obiger Versuch wiederholt, diesmal aber an Stelle der Ammoniumsulfonate mit Eisensulfonaten, wobei im Kolben sogar ein Überschuss an Eisenchlorid gelassen wurde mit der Hoffnung, dass der enstandene Schwefel sich mit dem Eisen verbinden werde und so im Kolben bliebe um nicht die Destillate zu verunreinigen. Dieser Versuch führte nicht zu dem gewünschten Ergebnis, da die Destillate so wie vorher verunreinig waren.

Zur Entfernung des Schwefels aus dem destillierten Öl haben Pilat und Sereda eine grosse Anzahl von Reinigungsmethoden versucht. Die besten Ergebnisse wurden mit metallischem Quecksilber erhalten. Diese letztere Methode wurde auch von uns angewendet.

Das durch Zersetzung der Sulfonsäure erhaltene Öl wurde in Äther aufgelöst und mehrere Stunden mit metallischen Quecksilber durchschüttelt.

Nachdem diese Behandlung mehrere Male wiederholt wurde, filtrierte man, der Äther wurde entfernt und das verbleibende Öl im

Vakuum bei einem Drucke von 35 mm destilliert. Bei der Destillation trennte ich folgende 3 Fraktionen:

Fraktion I zwischen 140—210° C.
» II » 200—220° C.
» III » 220—255° C.

Für jede dieser drei Fraktionen wurden folgende Bestimmungen durchgeführt: Dichte, Brechungsindex, Viskositätsindex. Die erhaltenen Resultate befinden sich in unten stehender Tabelle:

	Fr. I	Fr. II	Fr. III
Dichte bei 15° C	0,9524	0,9555	0,9598
Brechungsindex bei 20° C	1,5398	1,5353	1,5310
Viskosität in St.			
bei 100° F	4,94	11,03	28,22
bei 210° F	1,52	2,4	3,98
Viskositätsindex	—	7	43

Aus den obenstehenden Daten ersieht man, dass die Dichte sämtlicher Fraktionen diejenige des Ausgangsgasöl das der Sulfonierung unterzogen wurde überschreitet. Diese hohe spezifisches Gewicht kann als ein Anhaltspunkt für einen hohen Aromatengehalt gewertet wurden. Der Brechnungsindex sinkt von der ersten zur letzten Fraktion. Der Viskositätsindex der ersten Fraktion konnte wegen dem zu kleinen Wert den die Viskosität bei 210° F annimmt nicht berechnet werden.

Das ausführliche Studium dieser Fraktionen wird durch spätere Untersuchungen vervollständigt werden. Bevor wir aber diese Untersuchungen anfangen, stellen wir uns es zur Aufgabe eine Zersetzung der Sulfonate unter solchen Bedingung durchzuführen, dass das destillierende Öl nicht mehr von Schwefelverbindungen verunreignigt ist.

BIBLIOGRAPHIE

1. S. Pillat, E. Davidson, Petr., 24 (1928), p. 1559.
S. Pilat, J. Sereda, W. Szankowski, Petr., 29 (1933), p. 3.
J. Sereda, Petr. (1934), 30, 19.
S. Pilat, J. Sereda, Fettchem. Umschau.., 4 (1934), p. 171, 200, 237.
S. Pilat, W. Szankowski, Petr. (1935), 31, 10.
J. Sereda, Ber (1935), 68 (1933).
S. Pilat, N. Turkiewicz, Petr. (1938), 34, 8.
F. Neyman, S. Pilat, Ind. Eng. Chem. (1934), 26, 395.
W. Kisielewicz, S. Pilat, J. Sereda, Petr. (1938), 34, 10.
S. Pilat, J. Sereda, Refiner (1940), 19, Nr. 2, 62.

2. Robinson, U. S. Pat. 1.387.868 (1929).
3. G. Petrov, Chemisches Zentralblatt, (1928), I, 860.
4. R. Fussteig, Chimie et Industrie (1930), 30, 1027.
5. V. Cerchez, V. Niculescu, Oel und Kohle (1943), 39, 453.
6. S. Pilat, J. Sereda, Fettchem. Umschau. (1934), 41, 171, 200, 237.
7. S. Pilat, J. Sereda, W. Szankowski, Petr. (1933, 29, 3; S. Pilat, J. Sereda, Refiner, (1940), 19, Nr. 2, 62.
8. S. Pilat, J. Sereda, Refiner (1940), 19, Nr. 2, 62.
9. S. Pilat, W. Szankowski, Petr. (1935), 31, 10.